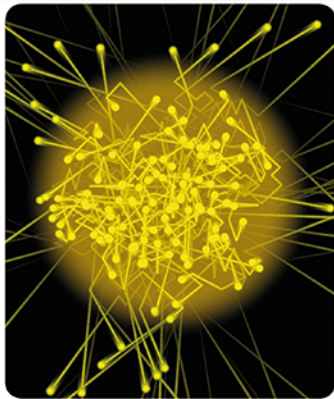
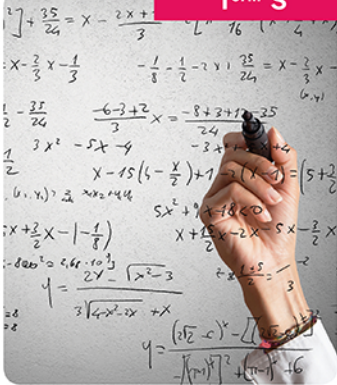


Réviser son bac
avec **Le Monde**ÉDITION
2016

avec

MATHÉMATIQUES

Term S

**L'ESSENTIEL DU COURS**

- Des fiches synthétiques
- Les points et définitions clés du programme
- Les repères importants

DES SUJETS DE BAC

- Des questions types
- L'analyse des sujets
- Les plans détaillés
- Les pièges à éviter

DES ARTICLES DU MONDE

- Le texte intégral des articles du *Monde*
- Un accompagnement pédagogique des articles

UN GUIDE PRATIQUE

- La méthodologie des épreuves
- Astuces et conseils de révisions

Antilles 7,90 €, Réunion 9,80 €,
Maroc 80 DH, Tunisie 10,30 DT,
M 02422 - SH - F: 7,90 € - RD



rue des écoles

En partenariat avec



assureur militant

Réviser son bac

avec *Le Monde*

Mathématiques Terminale, série S

Une réalisation de  rue des écoles

Avec la collaboration de :

Thomas Camara

Alain Larroche

Daniel Pompon

Jean-Marc Ravier

En partenariat avec



assureur militant

AVANT-PROPOS

L'ouvrage que vous avez entre les mains a pour objectif de vous aider dans la préparation de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat scientifique. Son intérêt réside d'abord dans la manière dont il reprend, point par point, les différents thèmes du programme de terminale S, en synthétisant – dans la partie « L'essentiel du cours » – les connaissances que vous devez maîtriser, mais aussi en listant dans les colonnes, les notions incontournables et les mots-clés dont vous devez connaître la définition précise.

Plusieurs exercices tirés des sujets récemment tombés au bac accompagnent chaque thème. Ils sont assortis de conseils de méthode pour les traiter ; tous sont corrigés en fin de volume.

Enfin, véritable originalité de l'ouvrage, des articles tirés du journal *Le Monde* viennent mettre en perspective chaque point du programme et vous offrent la possibilité d'enrichir votre culture mathématique et scientifique. Très accessibles, accompagnés d'un commentaire pédagogique vous permettant de bien comprendre les enjeux, ils sont signés notamment par des mathématiciens chevronnés tels Étienne Ghys, Cédric Villani, Pierre Cartier ou encore Jean-Michel Kantor. De quoi aborder l'examen en toute confiance, mais aussi préparer votre éventuelle entrée dans l'enseignement supérieur.

Il nous reste à vous souhaiter bon courage en espérant que nous aurons, à travers cet ouvrage, contribué à votre succès.

Les auteurs

Message à destination des auteurs des textes figurant dans cet ouvrage ou de leurs ayants-droit : si malgré nos efforts, nous n'avons pas été en mesure de vous contacter afin de formaliser la cession des droits d'exploitation de votre œuvre, nous vous invitons à bien vouloir nous contacter à l'adresse plusproduit@lemonde.fr.

En partenariat avec



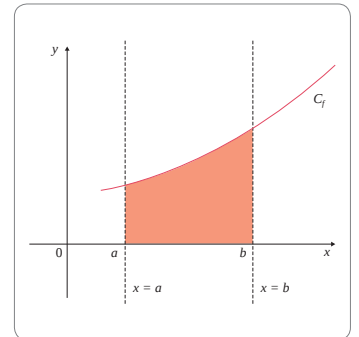
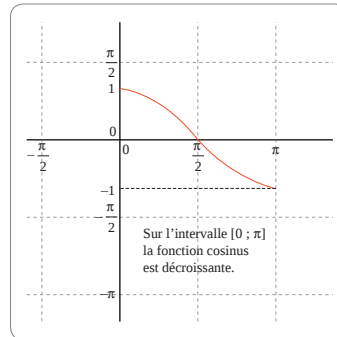
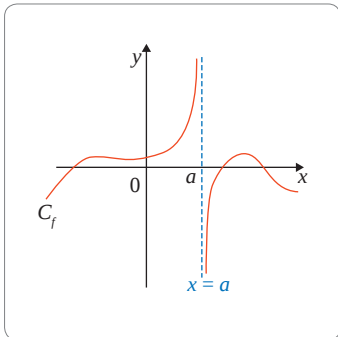
assureur militant

Complétez vos révisions du bac sur www.assistancescolaire.com :
méthodologie, fiches, exercices, sujets d'annales corrigés... des outils gratuits et efficaces
pour préparer l'examen.

SOMMAIRE

ANALYSE	p. 5
Chapitre 01 – Suites	p. 6
Chapitre 02 – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires	p. 10
Chapitre 03 – Dérivation	p. 14
Chapitre 04 – Fonctions sinus et cosinus	p. 18
Chapitre 05 – Fonction exponentielle	p. 22
Chapitre 06 – Fonction logarithme népérien	p. 26
Chapitre 07 – Intégration	p. 30
GÉOMÉTRIE	p. 33
Chapitre 08 – Nombres complexes	p. 34
Chapitre 09 – Géométrie dans l'espace	p. 38
PROBABILITÉS ET STATISTIQUES	p. 43
Chapitre 10 – Probabilités conditionnelles	p. 44
Chapitre 11 – Lois à densité	p. 50
Chapitre 12 – Échantillonnage	p. 56
ALGORITHMIQUE/LOGIQUE	p. 59
Chapitre 13 – Algorithmique/Éléments du raisonnement mathématique	p. 60
CORRIGÉS DES EXERCICES	p. 65
CULTURE SCIENTIFIQUE : MATHÉMATICIENS CONTEMPORAINS EMBLÉMATIQUES	p. 83
GUIDE PRATIQUE	p. 93

ANALYSE



MOTS CLÉS

SUITE

- Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$.
- L'image du naturel n par la suite u se note $u(n)$ ou plus souvent u_n .

TERME GÉNÉRAL

L'image d'un entier naturel n par la suite u se note u_n et s'appelle le **terme général de la suite** ou **terme de rang n** .

SUITE CROISSANTE

- Soit u une suite :
- la suite u est **croissante** si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$;
 - la suite u est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$.

SUITE DÉCROISSANTE

- Soit u une suite :
- la suite u est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$;
 - la suite u est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_n > u_{n+1}$.

SUITE CONVERGENTE

Si la suite (u_n) admet comme limite le réel a , cela signifie que tout intervalle ouvert centré en a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite (u_n) **converge** vers a .

SUITE DIVERGENTE

Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.
Dire qu'une suite est divergente peut signifier :

- qu'elle n'a pas de limite, comme pour la suite de terme général $u_n = \cos n$;
- que son terme général tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, comme pour la suite de terme général $u_n = n + 1$.

RAISON D'UNE SUITE

- Dans une **suite arithmétique**, on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un **même nombre r** , appelé **raison de la suite arithmétique**.
- Dans une **suite géométrique**, on passe toujours d'un terme au suivant en multipliant par un **même nombre q** , appelé **raison de la suite géométrique**.

Suites

Un couple de lapins, né le 1^{er} janvier, donne naissance à un autre couple de lapins, chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1^{er} janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu ?

Pour résoudre ce problème, le mathématicien italien Fibonacci (dit aussi Léonard de Pise) introduit dès 1202 la notion de suite. Ainsi, si on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du mois (avec $u_1 = 1$), la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On peut alors exprimer u_n en fonction de n et prévoir le nombre de lapins au bout de quelques mois.

Quand utiliser un raisonnement par récurrence et comment le rédiger ?

On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n , surtout lorsqu'il semble y avoir un lien simple entre ce qui se passe au rang n et ce qui se passe au rang $n + 1$.

Un raisonnement par récurrence se rédige en quatre étapes :

- On commence par énoncer la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1).
- **Hérédité** : on prouve le caractère héréditaire de la propriété. On suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.
- On conclut en invoquant le principe de récurrence.

Que faut-il retenir sur les suites géométriques ?

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même facteur (la raison que l'on note q).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le **terme général d'une suite géométrique** est :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Enfin, la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$ de raison $q \neq 1$

$$\text{est égale à : } u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Pour tout réel q différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si on obtient un nombre réel indépendant de n alors la suite est géométrique, sinon elle n'est pas géométrique.

Que faut-il retenir sur les suites arithmétiques ?

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre (la raison que l'on note r).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Le **terme général d'une suite arithmétique** est :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Cas particulier pour tout réel n , on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il faut calculer la différence : $u_{n+1} - u_n$.

Si on obtient un nombre réel indépendant de n , alors la suite est arithmétique, sinon elle n'est pas arithmétique.

Comment déterminer la limite d'une suite ?

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. La limite de la suite (u_n) dépend de son premier terme u_0 non nul et de sa raison q .

Quel que soit u_0 , si $-1 < q < 1$, alors la limite de la suite sera nulle.

Lorsque u_0 est positif :

- si $q > 1$, la limite de la suite sera égale à $+\infty$;
- si $q < -1$, la suite n'aura pas de limite.

Lorsque u_0 est négatif :

- si $q > 1$, la limite de la suite sera égale à $-\infty$;
- si $q < -1$, la suite n'aura pas de limite.

Si la suite (u_n) admet comme limite le réel l , alors tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) converge vers l .

Pour étudier la limite d'une suite, on peut exprimer le terme général de la suite en fonction de n et déterminer la limite de ce terme en faisant tendre n vers l'infini. Ou bien, on peut utiliser les **théorèmes de comparaison**.

Premier cas : si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Second cas : si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Troisième cas : si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$.

(théorème des « gendarmes »)

Enfin, il convient de se souvenir que toute suite croissante majorée est convergente et que toute suite décroissante minorée est également convergente :

- une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout naturel n , $u_n \leq M$;
- une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout naturel n , $u_n \geq m$;
- une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comment calculer la limite d'une somme des premiers termes d'une suite géométrique ?

On travaillera ici uniquement avec des suites géométriques de raison strictement positive.

Exemple : déterminer la limite de :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Première étape : reconnaître la somme d'une suite géométrique.

On reconnaît la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

On sait que : $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$\text{Donc : } S_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{D'où : } S_n = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Seconde étape : on utilise les résultats de la partie 3.

On est dans le premier cas, car $q = \frac{1}{2}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Troisième étape : on conclut,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2.$$

On peut généraliser cette démarche avec une propriété.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , strictement comprise entre 0 et 1. Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) .

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}.$$

Qu'est qu'une suite arithmético-géométrique ?

Définition : on dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que, u_0 étant donné, on a pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$. On peut donc calculer chaque terme d'une suite arithmético-géométrique en utilisant les coefficients a et b et le terme précédent.

MOTS CLÉS

LIMITE D'UNE SOMME

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$

LIMITE D'UN PRODUIT

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	si $l > 0$, si $l > 0$, $+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$	$?$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

LIMITE D'UN INVERSE

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} =$	$\frac{1}{l}$	en 0^+ , ou $+\infty$ en 0^- , ou $-\infty$	0

LIMITE D'UN QUOTIENT

On se ramène au cas d'un produit

$$\text{pour } \frac{u_n}{v_n} \text{ car } \frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}.$$

ZOOM SUR...

LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

On utilise un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n , surtout lorsqu'il semble y avoir un **lien** simple entre ce qui se passe au **rang** n et ce qui se passe au **rang** $n+1$:

- on énonce la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie ;
- on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1) ;
- on prouve le caractère héréditaire de la propriété ; on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$;
- on conclut en invoquant le principe de récurrence.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• La divine proportion p. 9

(Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 11.04.2013)

Métropole (juin 2013)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. **a)** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.
b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$
a) Exprimer S_n en fonction de n .
b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

La bonne méthode

1. **a)** On remplace n par 0 dans la relation de récurrence de l'énoncé pour déduire u_1 , puis n par 1 pour obtenir u_2 , etc.
b) Ordonner les termes successifs de la suite et conclure.
2. **a)** Démontrer la propriété par récurrence.
b) Remplacer u_{n+1} par l'expression donnée dans l'énoncé en fonction de u_n .
c) Utiliser le résultat du 2. **b)** et l'inégalité du 2. **a)**.
3. **a)** Exprimer pour un entier naturel n , v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n et conclure.
b) Exprimer v_n en fonction de v puis u_n en fonction de n .
c) Utiliser la propriété du cours donnant la limite de la suite (q^n) avec $-1 < q < 1$.
4. **a)** Décomposer S_n comme la somme d'une somme de termes d'une suite géométrique et d'une somme de termes d'une suite arithmétique.
b) Utiliser à nouveau la propriété du cours donnant la limite de la suite (q^n) avec $-1 < q < 1$.

Antilles-Guyane (sept. 2010)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$
a) Calculer v_0 .
b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
d) Exprimer v_n en fonction de n .
3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.
a) Calculer w_0 .
b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .
c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
d) Exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.
5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

La bonne méthode

1. La connaissance de u_2 nous permet de comparer $u_2 - u_1$ et $u_1 - u_0$, puis $\frac{u_2}{u_1}$ et $\frac{u_1}{u_0}$ et de conclure.
2. **a)** Utiliser la définition de v_n en fonction de u_n .
b) Utiliser la définition de v_n en fonction de u_n et la relation de récurrence entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .
c) Revenir à la définition d'une suite géométrique et ne pas oublier de préciser son premier terme.
d) Utiliser une propriété d'une suite géométrique.
3. **a)** Remplacer n par 0 dans la relation donnée dans l'énoncé.
b) Remplacer dans w_{n+1} , v_{n+1} et u_{n+1} en fonction de v_n et u_n , puis conclure.
c) Utiliser l'égalité obtenue précédemment et la définition de w_n .
d) Reconnaître la nature de la suite (w_n) puis utiliser la propriété *ad hoc*.
4. v_n et w_n ont été exprimés en fonction de n , d'où u_n .
5. v_n et w_n ont été exprimés en fonction de n , d'où u_n .
Démonstration par récurrence.

La divine proportion

Le nombre d'or, qui régit le rapport harmonieux entre les parties et le tout, est un exemple frappant d'idée mathématique : un concept simple, presque primitif, qui se retrouve partout autour de nous.

1,61803398875... Un livre tout entier consacré à un seul nombre ? Pourquoi celui-là plus qu'un autre ? Pourquoi porte-t-il des noms aussi prestigieux que le « nombre d'or » ou la « divine proportion » ? S'agirait-il d'un joyau ou d'une œuvre véritablement divine ? La lettre grecque ϕ (Phi) lui a même été attribuée, comme la lettre π est associée à son vieil ami et concurrent 3,1415926535. Ce nombre fascine depuis très longtemps. Il suffit de taper « *golden mean* » sur Google pour être frappé par la diversité des sites qui se l'approprient. On le voit partout, dans la philosophie, la spiritualité, l'art, l'économie et... dans les mathématiques. À vrai dire, les mathématiciens professionnels sont un peu agacés par la popularité de « leur » nombre d'or ; ce sont eux qui l'ont découvert (ou inventé ?), et voilà qu'il échappe à leur contrôle !

Beaucoup considèrent qu'on exagère son importance dans le domaine de l'esthétique et que le rôle mystique qu'on lui attribue est une imposture. Ils préfèrent se limiter à son aspect purement mathématique, et une revue tout à fait respectable – *The Fibonacci Quarterly* – est d'ailleurs presque entièrement consacrée à un thème très proche de ϕ : la suite de Fibonacci. Les mathématiques contemporaines manipulent le plus souvent des objets bien plus élaborés, et ϕ apparaît plutôt comme un souvenir d'un passé très lointain. Les mathématiciens ont cependant le sens de l'histoire de leur discipline et regardent cette « vieillesse » avec tendresse. Henri Poincaré affirmait que « la mathématique est l'art de donner

le même nom à des choses différentes ». Le nombre d'or réunit toute une multitude de phénomènes. Le cœur de l'explication commune avait déjà été explicité par Euclide il y a plus de deux mille ans. Lorsqu'on décompose un objet en deux parties inégales, on dit que la proportion est divine, ou dorée, si le rapport entre la grande partie et la petite est le même que le rapport entre le tout et la grande partie. La simplicité de cette définition explique l'omniprésence de ϕ . On le rencontre dans la croissance des populations de lapins, décrite par Fibonacci au Moyen Âge, dans les proportions qui régissent le pentagone régulier ou dans celles du Parthénon.

De ce point de vue, le nombre d'or apparaît comme l'un des exemples les plus frappants d'une idée mathématique : un concept simple, presque primitif, qui se retrouve partout autour de nous. C'est à ce titre que le nombre d'or a droit de cité dans le paysage mathématique. Je choisis un nombre au hasard d'une quinzaine de chiffres, comme 5 387 565 581 098 724 par exemple. Pourrait-on écrire un livre sur ce nombre ? Certainement pas ! Ce nombre ne parle que de lui-même, il n'est relié à aucune idée, il ne permet pas de comprendre « des choses différentes ».

Perception de l'espace

Je suis d'ailleurs probablement le premier (et le dernier !) dans l'histoire de l'humanité à avoir écrit ce nombre : il ne sert à rien ! Dans l'univers des nombres, certains sont plus riches que d'autres. Certains sont utiles,

d'autres sont attachants, mais l'immense majorité n'a pas grand intérêt.

Le monde qui nous entoure est peuplé de rectangles de toutes sortes. Quelques-uns sont dans la nature mais la plupart sont construits par l'homme, qui doit cependant se plier aux lois naturelles. Le fil à plomb est perpendiculaire à l'horizontale et il est bien commode de construire des maisons dont les murs sont rectangulaires... Il se trouve que beaucoup de ces rectangles sont dorés : le rapport entre longueur et largeur est égal à ϕ . Pour vérifier qu'un rectangle situé devant vous est bien doré, rien n'est plus facile. Sortez votre carte de crédit (ou votre carte Vitale, ou de bibliothèque !), et essayez de masquer le rectangle en plaçant la carte devant vos yeux. Si le rectangle est exactement masqué par la carte, il est doré ! La prédominance de ces rectangles d'or est-elle un fait acquis ou une illusion ? Ce n'est pas clair. Après tout, on voit aussi beaucoup d'autres formes de rectangles qui ne sont pas dorés,

comme par exemple les feuilles au format A4 ou encore les carrés. Dans les musées d'art, cette abondance ne fait pourtant aucun doute ; beaucoup de tableaux ont des proportions divines. Certains pensent que nous avons une préférence innée pour l'esthétique du rectangle d'or. Quant à moi, je préfère penser que les mathématiques influencent notre sens esthétique. L'artiste qui choisit ce format pour une toile ne le fait pas parce qu'il considère que ce rectangle est « beau ». De manière consciente ou inconsciente, il sait que cette proportion « contient » plus de deux mille ans de mathématiques et de réflexion sur l'harmonie et sur les liens qui unissent les nombres et notre perception de l'espace.

Avant même de commencer à peindre, le tableau a déjà du contenu ; il fait partie d'une histoire et d'une culture. En filigrane, on peut deviner la présence du passé ; Euclide, Fibonacci, Léonard de Vinci, Kepler, Escher et tant d'autres sont présents... ■

Étienne Ghys

Le Monde daté du 11.04.2013

POURQUOI CET ARTICLE ?

Il évoque la suite célèbre de Fibonacci, pour laquelle les deux premiers termes sont 0 et 1, et chacun des termes suivants est égal à la somme des deux termes précédents. Mathématiquement, cette suite (F_n) est définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

On a : $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$; $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$; $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$; $F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$; $F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$, etc.

En posant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on démontre que

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (formule de Binet).

MOTS CLÉS

LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage de a :

- la limite de f en a est $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si tout intervalle

de la forme $]M; +\infty[$ où $M \in \mathbb{R}$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a ;

- la limite de f en a est $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si tout intervalle

de la forme $]-\infty; M[$ où $M \in \mathbb{R}$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a ;

- la limite de f en a est le réel l et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, si tout intervalle

de la forme $]l - r; l + r[$ où $r > 0$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

FORME INDÉTERMINÉE

Dans un calcul de limites, on a une « forme indéterminée » lorsque l'on ne peut pas conclure directement. Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction :

- soit en factorisant par le terme dominant (cas des fonctions polynômes et rationnelles en $+\infty$ ou $-\infty$) ;

- soit en utilisant la quantité conjuguée (cas des fonctions racines carrées) ;

- soit en revenant à la définition du nombre dérivé (cas des fonctions sous la forme d'un taux d'accroissement).

ASYMPTOTE

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe

représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors la courbe

représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$, à l'infini.

THÉORÈME DES GENDARMES

si $f(x) \leq k(x) \leq g(x)$ et si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow a} k(x) = l.$$

(valable pour $a \in \mathbb{R}$ ou a qui est $-\infty$ ou $+\infty$)

Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Déterminer des limites éventuelles d'une fonction n'a d'intérêt que lorsque x tend vers une borne ouverte de l'ensemble de définition D_f de f . On peut ainsi mettre en évidence la présence éventuelle d'asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f .

La notion de continuité permet notamment de résoudre des équations du type $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$, f fonction continue) ou donner une valeur approchée de ses solutions.

Opérations sur les limites

Soit f une fonction définie au voisinage de a . Ici a peut être un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme en a

Si f a pour limite :	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite :	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$

Limite d'un produit en a

Si f a pour limite :	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f \times g$ a pour limite :	$l \times l'$	si $l > 0$, $+\infty$ si $l < 0$, $-\infty$	si $l > 0$, $-\infty$ si $l < 0$, $+\infty$	$?$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite de l'inverse en a

Si g a pour limite :	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{1}{g}$ a pour limite :	$\frac{1}{l}$	$+\infty$ ou $-\infty$	0

Comment lever une forme indéterminée ?

Les « ? » dans les tableaux précédents signifient que l'on ne peut pas conclure directement : on est en présence d'une « forme indéterminée », donc devant une limite de la forme : $+\infty - \infty$ ou $\infty \times 0$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$. Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction.

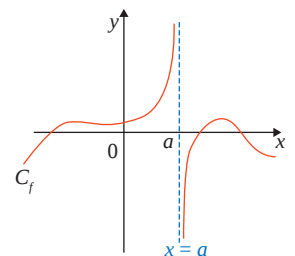
Comment détermine-t-on la présence d'asymptotes à la courbe d'une fonction ?

Asymptote verticale

d'équation $x = a$:

lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty.$$

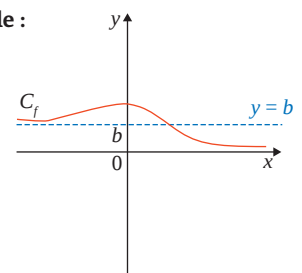


Asymptote horizontale :

d'équation $y = b$:

lorsque

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b.$$



Comment déterminer la limite d'une fonction en utilisant la comparaison ?

On peut utiliser les théorèmes de limite par comparaison.

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a , et soit l un nombre réel.

Premier cas : si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Second cas : si $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Troisième cas (théorème des gendarmes) : si $f(x) \leq k(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = l$.

On peut utiliser les comparaisons directes :

- pour tout réel x , on sait que $x < e^x$;
- pour tout réel x strictement positif : $\ln x < x$.

Qu'est ce qu'une fonction continue ?

Approche graphique : pour une fonction f définie sur un intervalle I , on dit que la fonction f est continue sur I , lorsque sa courbe représentative C_f se trace « sans lever le crayon ».

Propriétés :

- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur leur ensemble de définition ;
- les fonctions construites à partir des fonctions de référence sont continues sur leurs ensembles de définition ;
- les fonctions polynômes sont continues sur l'ensemble des réels ;
- les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemples :

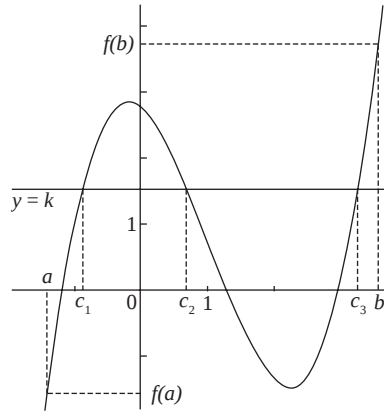
- la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur l'ensemble des réels en tant que fonction polynôme ;
- la fonction f définie pour tout réel $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ en tant que fonction rationnelle.

Propriété des valeurs intermédiaires

Propriété fondamentale des fonctions continues : soit un intervalle I , $(a, b) \in I^2$ et f une fonction continue sur I .

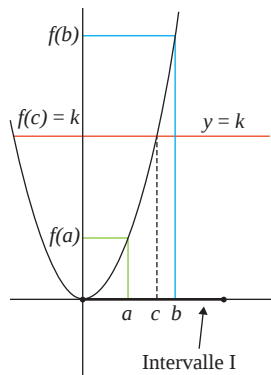
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique : la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction f en un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Interprétation en terme d'équation : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b . (c_1, c_2 et c_3 en utilisant le graphique).

Cas particulier des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle : soit un intervalle I , $(a, b) \in I^2$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I . **Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique comprise entre a et b .**



UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **Retour à Leibniz** p. 13
(Propos recueillis par Pierre Cartier et Maurice Arvonny, *Le Monde* daté du 16.12.1987)

MOTS CLÉS

FONCTION CONTINUE

- Une fonction f , définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a , est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Une fonction f , définie sur un intervalle I ouvert, est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a appartenant à I .
- Une fonction f , définie sur un intervalle $[a ; b]$, est « continue sur $[a ; b]$ » lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]a ; b[\\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{array} \right.$$

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur I , pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $c \in [a ; b]$.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Les solutions de l'équation $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y = k$.

ZOOM SUR...

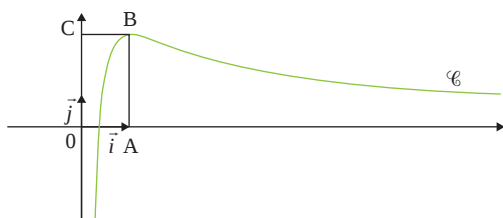
LA MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

On utilise la **méthode par dichotomie** pour déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation du type $f(x) = 0$ sur $[a ; b]$ avec une précision donnée :

- on démontre à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a ; b]$;
- on calcule $f(c)$, c étant le milieu de l'intervalle $[a ; b]$;
- si $f(a) \times f(c) < 0$, la solution de l'équation est dans $]a ; b[$, sinon elle est dans $]c ; b[$;
- on continue en testant le milieu du nouvel intervalle et ce, jusqu'au moment où l'on obtient la précision demandée.

Métropole (juin 2013)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(0; 2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x , $f(x) = \frac{a+b \ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x ,

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}.$$

c) En déduire les réels a et b .

2. a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

La bonne méthode

1. a) Considérer le point B d'abscisse 1.

b) Utiliser la formule donnant la dérivée d'un quotient.

c) Utiliser les résultats du **1. a)**.

2. a) Remplacer dans l'expression de f' , a et b par les valeurs trouvées précédemment, et remarquer que x^2 est positif.

b) Utiliser les limites des fonctions usuelles.

c) Déterminer le signe de $-\ln(x)$ puis les variations de f . Penser à préciser les bornes et les extremums éventuels.

3. a) Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]0; 1]$.

b) Appliquer la technique de balayage.

Polynésie (juin 2010)

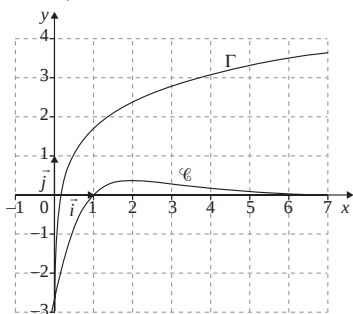
On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

1. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1; +\infty[$ une unique solution notée α .

b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par Γ la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.



a) En utilisant la courbe Γ , construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

La bonne méthode

1. a) Il faut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

b) Par définition de α , $g(\alpha) = 0$...

2. a) Il faut utiliser la bissectrice $\Delta: y = x$.

b) On montre la propriété par récurrence en posant $f(x) = \ln(2x) + 1$, et en utilisant le fait que la fonction f est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée donc convergente. Pour déduire la limite on fait tendre n vers $+\infty$, dans l'équation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Retour à Leibniz

Les mathématiciens, explique M. Pierre Cartier, « redonnent vie au calcul infinitésimal du dix-huitième siècle ».

Au colloque « Avenir des mathématiques » qui s'est tenu les 8 et 9 décembre à l'École polytechnique à Palaiseau, il a été beaucoup question de l'analyse non-standard. Cette branche nouvelle des mathématiques renoue avec une approche très courante il y a deux siècles, mais abandonnée ensuite en raison des contradictions auxquelles elle conduisait. Nous avons demandé à M. Pierre Cartier, directeur de recherches au CNRS, ce qu'est cette analyse et quelles sont ses implications.

Comment définiriez-vous l'analyse non standard ?

C'est un essai de réintroduire dans les mathématiques une notion qui en a été éliminée il y a environ un siècle : celle d'infiniment petit et d'infiniment grand. Historiquement, on a eu, au dix-septième siècle, un conflit entre deux points de vue, disons celui de Leibniz qui manipulait des infiniment petits et celui de Newton qui faisait ce qu'on peut appeler des calculs de limites. Ces points de vue ont coexisté pendant deux siècles, avec pour chacun des difficultés et des contradictions. Au siècle dernier, Cauchy et surtout Weierstrass ont fait du calcul des limites un instrument parfaitement rigoureux, tandis que le calcul infinitésimal restait entaché de contradictions. Depuis, les mathématiques sont entièrement fondées sur le calcul des limites. Le calcul infinitésimal de Leibniz a continué sa vie propre, en dehors des mathématiques, et reste fécond dans les sciences appliquées, où raisonner dans des situations extrêmes, dans lesquelles certains paramètres sont très petits ou très grands, est une pratique courante. La

notion d'ordre de grandeur reste très familière dans ces sciences, alors qu'elle n'a pas d'expression mathématique rigoureuse.

Mais qu'est-ce qui empêche de la définir rigoureusement ?

C'est justement le grand apport d'Abraham Robinson d'avoir montré que c'était possible. Dans l'approche mathématique usuelle, il n'y a pas de place pour les infiniment petits. La définition qu'on souhaiterait en donner, c'est-à-dire des nombres plus petits que tout nombre donné à l'avance, est contradictoire ou, plutôt, est une définition du seul zéro. Car s'il existait deux nombres qui y répondent, chacun devrait être plus petit que l'autre. Or Robinson a montré qu'on pouvait fabriquer un système logique où, à côté des nombres habituels, il y a des infiniment petits et des infiniment grands. Au cours de l'histoire, la notion de nombre s'est progressivement élargie. On est passé des entiers aux nombres fractionnaires, puis on a ajouté les nombres négatifs, les nombres complexes... L'apport de Robinson est une étape supplémentaire. Je rappelle que Robinson est un des grands logiciens du siècle, mais aussi un des grands ingénieurs de l'aérodynamique. Il a travaillé pendant la guerre à Farnborough, puis comme consultant de Boeing aux États-Unis, avant de devenir professeur d'université à Tel-Aviv. Il est de ceux qui ont contribué au développement du vol supersonique. En mathématiques, on s'interdit d'utiliser des mots « grand » et « petit » de manière absolue. On dit seulement qu'une chose est plus grande qu'une autre. Mais, pour tout praticien qui a utilisé des nombres –

et l'ingénieur Robinson en était un – il n'y a pas d'ambiguïté sur ce qui est grand ou petit dans une situation déterminée. Chacun admet que si l'on a quelque chose de très grand, et qu'on retire quelque chose de petit, ce qui reste est très grand. Une telle affirmation paraît cependant imprécise. Mais, sur elle et quelques autres, on peut codifier un langage cohérent et rigoureux. C'est ce qui résulte des travaux du logicien Robinson.

Quels sont les développements actuels de ces travaux ?

Certains ont cherché des applications, soit en redonnant un exposé différent de résultats déjà connus, soit en défrichant des domaines vierges. Ainsi l'école de Strasbourg, autour de Georges Reeb, a cherché à débroussailler des phénomènes mécaniques complexes comme les oscillations de relaxation. Elle a montré que l'analyse non standard était le langage propre pour exprimer la dualité entre ce qu'on connaît au niveau microscopique et ce qu'on observe au niveau macroscopique. Cela devrait avoir des

applications en météorologie, ou dans l'étude des rythmes cardiaques, ou d'autres phénomènes dont la théorie mathématique était un peu chancelante. D'autres, dont je fais partie, ont surtout cherché à simplifier les fondements de la théorie. Dans la lignée des travaux du mathématicien américain Edward Nelson, et aussi d'un philosophe et mathématicien tchécoslovaque, Vopienka, qui travaille dans des conditions très difficiles, il y a eu un effort de réflexion sur les fondements. Ce qui se dégage progressivement est une codification d'une partie de la méthode de Robinson. On essaie de cerner ce qui est essentiel et de créer, à partir d'un outil complexe et fragile, un instrument robuste. Cette approche a déjà donné des résultats, par exemple pour rendre plus intuitive la théorie des probabilités. ■

Propos recueillis par Pierre Cartier et Maurice Arvonny
Le Monde daté du 16.12.1987

POURQUOI CET ARTICLE ?

Pendant deux siècles, le calcul de limites a été opposé au calcul infinitésimal, qui utilisait les infiniment petits.

Le calcul de limites, tel qu'on le connaît actuellement, s'est imposé, car il était rigoureusement mieux défini. Les infiniment petits, eux, n'étaient plus utilisés que dans les sciences appliquées (chimie, physique, etc.).

Le calcul infinitésimal revient cependant sur le devant de la scène, comme branche des mathématiques, grâce au développement récent de l'analyse non-standard.

Notons que pour élaborer rigoureusement le calcul de limites, il a fallu plusieurs siècles aux mathématiciens pour définir tout d'abord la notion d'infini...

MOTS CLÉS

FONCTION DÉRIVABLE EN UN SEUL POINT

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe un réel m tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m$.

• Le nombre réel m s'appelle le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a) = m$.

FONCTION DÉRIVÉE

• Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction qui, à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x , est appelée fonction dérivée de f . Elle est notée f' .

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

• Sa fonction dérivée f' s'appelle dérivée première ou dérivée du premier ordre de f .

• Lorsque la fonction f' est dérivable sur I , sa dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée dérivée seconde de la fonction f .

• On peut ainsi définir, pour tout naturel n tel que $n > 1$, la dérivée n -ième (ou dérivée d'ordre n) de la fonction f , comme étant la dérivée de la dérivée d'ordre $(n-1)$ de f .

TANGENTE À UNE COURBE

• La tangente à une courbe $\mathcal{C}$ en un point A est la position limite, quand elle existe, de la sécante (AM) lorsque le point M de la courbe tend vers le point A .

• Si une fonction f est dérivable en a , alors sa courbe représentative admet, au point A d'abscisse a , une tangente passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

• Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a (et d'ordonnée $f(a)$) est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Dérivation

Le concept de dérivée est apparu il y a environ trois siècles. Il est lié, en mathématiques, à la notion de tangente à une courbe, et en sciences physiques à celle de vitesse instantanée d'un mobile.

Qu'est ce qu'une fonction dérivable en un point ?

Une fonction f est dérivable en un réel a de son ensemble de définition si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie quand x tend vers a .

Dans ce cas, ce réel est appelé « le nombre dérivé de f en a » et est noté $f'(a)$.

$$\text{On a } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel a appartenant à I . On appelle « fonction dérivée de f » la fonction qui, à tout réel x appartenant à I , associe le réel $f'(x)$.

Que faut-il retenir de la classe de Première ?

fonction f	fonction f'	Conditions
$x \mapsto ax + b$, a et b réels	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$u + v$	$u' + v'$	
ku , k réel	ku'	
$u \times v$	$u'v + uv'$	
u^n	$n u' u^{n-1}$	si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $u \neq 0$ sur I .
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I .
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I .
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto a \times u'(ax+b)$	Si $x \in I$, u est dérivable en $y = ax + b$

Les nouvelles fonctions étudiées en classe de Terminale

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$. Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I , $(e^u)' = u' e^u$ sur I .

Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et pour toute fonction u dérivable strictement positive sur un intervalle I , $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x)$

et $\cos'(ax + b) = -a \sin(ax + b)$.

Pour tout réel x , $\sin'(x) = \cos(x)$

et $\sin'(ax + b) = a \cos(ax + b)$.

Équation de la tangente à une courbe en un point où la fonction est dérivable

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors le nombre dérivé de f en a appartenant à I , noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse a . Une équation de T est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa dérivée sur I :

■ si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I ;

■ si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I .

■ si une fraction f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

• **L'économie s'est-elle dissoute dans les mathématiques ?** p. 16

(Marie-Béatrice Baudet, *Le Monde* daté du 31.10.2000)

• **Kiyoshi Itô** p. 17

(Stéphane Foucart, *Le Monde* daté du 30.11.2008)

L'économie s'est-elle dissoute dans les mathématiques ?

Des équations différentielles... à McFadden et Heckman

C'est une histoire vieille de près de deux cents ans. Elle débute à la fin du XVIII^e siècle avec David Ricardo, courtier britannique d'origine portugaise, premier des économistes à utiliser la formalisation mathématique. S'il est l'un des pères de la théorie quantitative de la monnaie, il s'intéresse, au démarrage de ses travaux, à la question de la rente que tirent les propriétaires de la location de leurs terres. Il met en évidence – mathématiquement – qu'elle varie selon la fertilité du terrain et le besoin de production agricole.

Que deux économètres américains, Daniel McFadden et James Heckman, soient les lauréats de l'an 2000 du prix Nobel d'économie prouve que l'aventure se poursuit plus que jamais.

L'ambition des économistes est d'anticiper. Et, pour ce faire, ils ont besoin de modéliser : nous voilà tombés dans le champ de l'économétrie, qui se fonde, dans sa plus simple expression, sur la théorie des polynômes et des développements limités, bref de l'algèbre façon $y = ax + b...$ Toute prévision va donc s'exprimer par une équation. Comment Keynes est-il parvenu à placer la « demande effective » au cœur de son analyse ? Via la mise en équations simples de l'économie. Par exemple : $I = S$ (l'investissement est égal à l'épargne) ou encore $C = cY$ (la consommation est proportionnelle au revenu disponible). Les relations mises en évidence devenant de plus en plus élaborées, l'économiste britannique va faire appel à une technique

mathématique pure, souvent utilisée par les chercheurs : l'équation différentielle de second ordre. De fil en aiguille, Keynes en arrive à son idée de « multiplicateur », qui repose sur une logique de circuit : toute demande autonome (investissement, solde positif du commerce extérieur, etc.) booste l'activité et les revenus, qui, à leur tour, alimentent une hausse de la demande... et la boucle repart.

L'apport de Paul Samuelson, le théoricien américain, et de son « oscillateur », dynamise encore davantage la démonstration : le résultat obtenu n'est pas des moindres, puisqu'il conduit à découvrir que l'économie est cyclique.

Courbe de Gauss

Le Français Léon Walras, père de l'école marginaliste, un ingénieur qui, après avoir raté le concours de Polytechnique, intègre l'École des mines, sera l'un des économistes à pousser très loin la formulation mathématique : il présente sa théorie de l'équilibre général en intégrant un nombre impressionnant de variables : les prix, les salaires, les facteurs de production, la monnaie, le crédit... Tout cela sous forme d'équations, méthode – il faut le souligner – typiquement française. Les économistes britanniques préfèrent souvent la géométrie. Keynes s'est appuyé ainsi sur la trigonométrie...

Les économistes-mathématiciens désireux de relier les séries de chiffres que leurs calculs savants mettent au jour

vont, dans un deuxième temps, faire appel à leurs confrères statisticiens et à un certain nombre de lois bien connues de tous les étudiants en économie. À tout seigneur, tout honneur : Carl Friedrich Gauss, astronome, mathématicien et physicien allemand, homme du XVIII^e et du XIX^e siècle, est célèbre pour sa courbe en cloche qui décrit la distribution de la plupart des variables aléatoires : la notation aux examens, la fréquentation des magasins en fonction des heures d'ouverture, etc.

La loi de Poisson, dont la formule a fait souffrir nombre d'élèves, régit, elle, par exemple, les files d'attente au cinéma.

Le principe de Pareto, ingénieur et économiste italien, est aussi à mettre à l'inventaire. Sa loi

décrit (*Le Monde* du 1^{er} septembre 2000) une situation inversement proportionnelle. Au point de départ de son système, l'étude qu'il avait menée notamment en Angleterre, alors industrielle, et en Russie agraire, et qui montrait que la répartition de la richesse y était inégale : 20 % de la population détenait 80 % de la fortune. Il est étonnant de constater que ces proportions de 80-20 se retrouvent dans des réalités plus modernes : 80 % des coups de téléphone s'adressent à 20 % des personnes qui s'affichent dans un répertoire. De même, 20 % des routes concentrent 80 % du trafic... ■

Marie-Béatrice Baudet

Le Monde daté du 31.10.2000

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne les équations différentielles, qui sont utilisées en économie.

Les équations différentielles sont des équations contenant les termes f et f' ; f, f' et f'' ; f et f'' ; etc., dont l'inconnue est la fonction f (dérivable sur un intervalle).

Par exemple, les solutions des équations différentielles du premier ordre de la forme $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ donné, sont les fonctions exponentielles $y(x) = \lambda e^{-ax}$ définies sur $\mathbb{R}$.

λ est à déterminer en donnant une autre condition à cette équation. Ainsi la fonction solution trouvée sera unique.

Par exemple, dans le programme de terminale S, la fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. Dans ce cas, $a = -1$, et $\lambda = f(0) = 1$.

Les équations différentielles du second ordre sont celles de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.

Ses solutions dépendent de celles dans $\mathbb{C}$ de son équation caractéristique du second degré $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue r .

Kiyoshi Itô

Les travaux de ce grand mathématicien japonais ont irrigué nombre de domaines étrangers aux mathématiques, depuis l'aéronautique et la biologie jusqu'à la finance.

Figure légendaire des probabilités et père du calcul stochastique, le mathématicien japonais Kiyoshi Itô est mort à Kyoto (Japon) lundi 10 novembre, à l'âge de 93 ans. Ses travaux ont notamment été récompensés par le premier prix Gauss, décerné en 2006 par l'Union mathématique internationale (UMI) et l'Union mathématique allemande (DMV) et distinguant une œuvre mathématique aux nombreuses applications. Peu de mathématiciens peuvent se targuer d'avoir autant contribué que M. Itô à façonner le monde. Ses travaux ont irrigué nombre de domaines étrangers aux mathématiques, depuis l'aéronautique et la biologie jusqu'à la finance.

Né le 7 septembre 1915 dans une région rurale du nord du Japon, il étudie les mathématiques à l'université de Tokyo à une époque où, selon lui, les probabilités ne constituent pas encore une discipline à part entière. « *Quand j'étais étudiant, disait-il en 1998, en recevant le prix Kyoto pour les sciences fondamentales, il y avait très peu de chercheurs en probabilités. Avec, parmi les rares, Kolmogorov en Russie et Paul Lévy en France.* » Diplômé en 1938, il rejoint le Bureau des statistiques japonais, où il restera jusqu'en 1943. Un an plus tôt, il publie une contribution dans *Japanese Journal of Mathematics* qui

marque le début de ses travaux sur les processus aléatoires – ou « stochastiques ». Nommé maître de conférences à l'université de Tokyo en 1943, il obtient son doctorat deux ans plus tard.

Ses premiers travaux ne sortent guère du Japon quelque peu enclavé de l'après-guerre. Dans les années 1950, plusieurs séjours à l'étranger, en particulier au célèbre Institute for Advanced Studies (IAS) de Princeton (États-Unis), lui permettent de diffuser ses idées.

« *Kiyoshi Itô est aujourd'hui au moins considéré comme le plus grand probabiliste du XX^e siècle* », dit le mathématicien Jean-Pierre Bourguignon, directeur de l'Institut des hautes études scientifiques (IHES). Lorsqu'un phénomène est aléatoire (ou pseudo-aléatoire) – mouvements d'une molécule de gaz dans une enceinte, variations du cours d'une action, turbulences de masses d'air, etc. –, la fonction mathématique qui le décrit ne se plie guère aux techniques d'analyse classiques. Le grand apport du mathématicien japonais a été d'inventer les outils – en particulier la « formule d'Itô » – capables d'examiner et de manipuler de manière comparable les processus aléatoires et les processus déterministes (ou classiques).

Le père du « calcul stochastique »

« *Au lycée, on apprend le principe simple selon lequel une fonction dérivable est l'intégrale de sa dérivée*, explique Jean-François Le Gall, professeur à l'université Paris-XI et membre de l'Institut universitaire de France. *La "formule d'Itô" est un outil qui permet de généraliser ce principe aux fonctions irrégulières parce que dépendant du hasard.* » Cette « formule d'Itô » (ou lemme d'Itô) forme la pierre angulaire de ce que les mathématiciens appellent le « calcul stochastique », dont Kiyoshi Itô est véritablement le père.

Le calcul stochastique a bien sûr des applications dans la finance. « *En mathématiques financières, toutes les applications liées au problème d'évaluation d'actifs ou de produits financiers comme les options d'achat ou de vente reposent sur le calcul stochastique* », explique M. Le Gall.

Les solutions aux problèmes de probabilités appliquées, comme

les problèmes dits de « filtrage » – où l'on ne « voit » qu'une partie du problème que l'on cherche à résoudre –, reposent aussi sur les contributions de Kiyoshi Itô. « *Par exemple, le déplacement d'une fusée n'est pas exactement la solution d'une équation différentielle classique : il est la solution d'une équation différentielle perturbée par des petits « bruits » aléatoires comme les variations du vent sur la carlingue, les vibrations du moteur, etc.*, illustre M. Le Gall. *Ce type de problèmes se traite grâce au calcul stochastique d'Itô.* »

« *Kiyoshi Itô est pour moi la figure emblématique du mathématicien dont les travaux, pourtant très fondamentaux, trouvent en définitive d'innombrables applications en dehors des mathématiques* », dit M. Bourguignon. Même si, ajoute M. Le Gall, ses apports ont eu, « *pour les mathématiques elles-mêmes, la plus grande importance* ». ■

Stéphane Foucart

Le Monde daté du 30.11.2008

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne les **équations différentielles, qui sont utilisées régulièrement en sciences physiques** (ici, pour le déplacement d'une fusée), mais aussi plus généralement pour d'autres types de mouvement (lien entre l'accélération, la vitesse et la position d'un mobile).

On a vu que les équations différentielles sont des équations contenant les termes f et f' ; f , f'' et f' ; f et f'' ; etc., dont l'inconnue est la fonction (dérivable sur un intervalle donné).

MOTS CLÉS

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Une unité de longueur a été fixée. On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, muni d'un point origine et d'un sens de rotation (appelé sens direct).

FONCTIONS cos, sin

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique d'origine O et A et B les points de $\mathcal{C}$ tel que le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ soit orthonormal de sens direct. Soit x un réel et M le point de $\mathcal{C}$ associé à x :

- le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M dans le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$;

- le sinus de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M dans le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.

FONCTION PAIRE

Une fonction f est paire si et seulement si :

- quel que soit le réel $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$;

- C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

FONCTION IMPAIRE

Une fonction f est impaire si et seulement si :

- quel que soit le réel $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$;

- C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

AXE DE SYMÉTRIE

Une droite $\mathcal{D}$ est l'axe de symétrie d'une figure F si et seulement si le symétrique par rapport à $\mathcal{D}$ de tout point M de la figure F est aussi un point de F .

CENTRE DE SYMÉTRIE

Un point I est le centre de symétrie d'une figure F si et seulement si le symétrique par rapport à I de tout point M de la figure F est aussi un point de F .

FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que, pour tout réel x : $f(x+T) = f(x)$.

Fonctions sinus et cosinus

Parmi l'ensemble des fonctions étudiées, les fonctions sinus et cosinus présentent des particularités spécifiques, notamment la périodicité. L'étude de ces fonctions sur leur période (un intervalle) va permettre d'obtenir la représentation graphique de toute la fonction.

Définition, dérivation

La fonction cosinus, notée $\cos$, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\cos x$.

La fonction sinus, notée $\sin$, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\sin x$.

Propriétés : les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur l'ensemble des réels, donc continues.

Pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \cos'(ax+b) = -a\sin(ax+b).$$

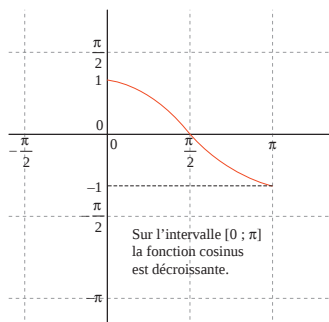
$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \sin'(ax+b) = a\cos(ax+b).$$

Exemple : la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(4x+5)$ est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -12\sin(4x+5)$.

Fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

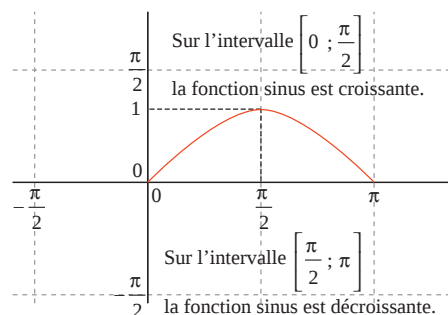
La fonction cosinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	-	0
cos	1	(o)	-1



La fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	-
sin	0	1	0

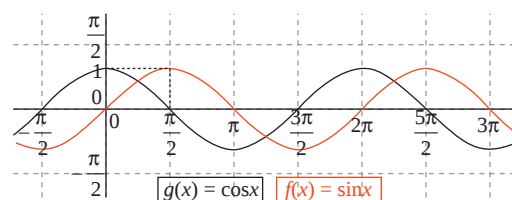


Parité, périodicité des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x , on a $\cos(-x) = \cos(x)$, donc la fonction cosinus est **paire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour tout réel x , on a $\sin(-x) = -\sin x$, donc la fonction sinus est **impaire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Pour tout réel x , on a $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$, donc les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .



DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

• **Un ordinateur dans votre poche** p. 20 (Jean-Marc Chabanas, *Le Monde* daté 15.09.1973)

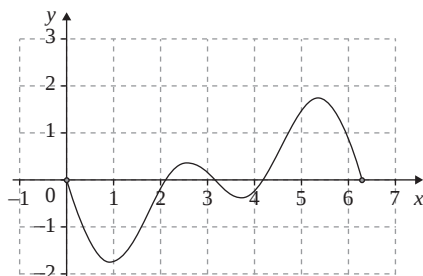
• **La guerre des contenus sur mobile s'intensifie** p. 21 (Alexis Delcambre et Alexandre Piquard, *Le Monde Eco et entreprise* daté du 09.10.2015)

Sujet inédit

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$

par : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) + 1$.

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.



1. **a)** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$: $f'(x) = -\sin(x) [1 + 2\cos(x)]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x) [1 + 2\cos(x)] = 0$.
3. **a)** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' ci-dessus, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

b) Déduire des questions 2. et 3. **a)** le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ dans le repère précédent (où f' est déjà représentée).

La bonne méthode

1. **a)** Pour tout réel x :
 $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax + b) = -a\sin(ax + b)$.
b) Mettre $-\sin x$ en facteur dans l'expression de f' .
2. Pour résoudre une équation produit, il faut utiliser la propriété suivante : « un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul ».
3. **a)** Placer les valeurs où f' s'annule, puis les intervalles où elle est positive et négative.
b) Si $f' \geq 0$ sur un intervalle I , f est croissante sur I .
Si $f' \leq 0$ sur un intervalle I , f est décroissante sur I .
4. Pour représenter graphiquement la fonction, on peut s'aider d'un tableau de valeurs.

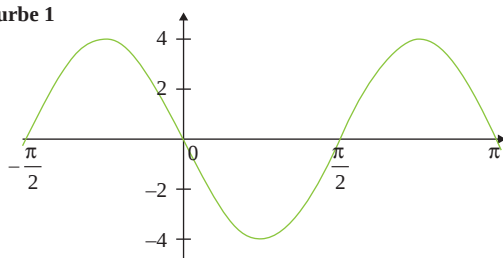
Nouvelle-Calédonie (mars 2013)

Pour l'énoncé suivant, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

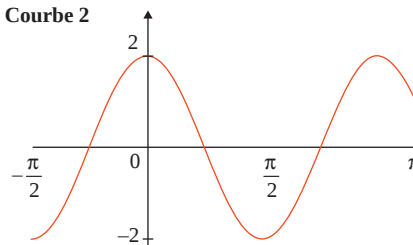
On considère une fonction f , sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition : « La courbe 3 est la représentation graphique de f . »

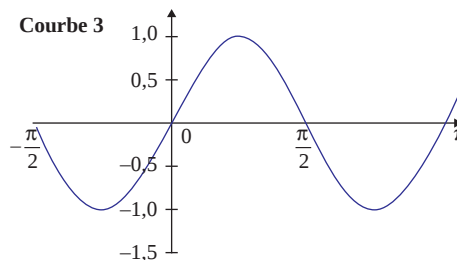
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



La bonne méthode

Si la courbe représentative de f est la courbe 3, quelle courbe est la représentation de F ?

Un ordinateur dans votre poche

Est-ce sous la forme de l'ordinateur individuel que l'informatique entrera dans la vie de tous les jours ? On connaît l'essor des « calculatrices » de poche, équivalent sous forme réduite des calculatrices de bureau, effectuant les quatre opérations arithmétiques fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. Dans leur sillage, certains constructeurs d'ordinateurs classiques proposent maintenant des « calculateurs » de poche. Ils traitent des fonctions plus complexes : inverses, logarithmes, lignes trigonométriques, intérêts composés, taux d'amortissement. Si l'on ose ainsi passer du sexe faible au sexe fort, on ne prononce encore que timidement le mot d'« ordinateur » de poche. Et pourtant, on retrouve bien là, sous une forme simple, les principes et la structure des ordinateurs, à un prix dérisoire. Mais l'est-il vraiment pour le service rendu ?

Le calculateur de poche, comme le livre du même nom, suppose en fait une grande poche. Il pèse dans les 200 grammes et mesure environ 8 centimètres sur 15, pour 2 bons centimètres d'épaisseur.

Que fait-il ? Sinus, cosinus, puissances, bref une dizaine de fonctions complexes s'ajoutant aux fonctions arithmétiques classiques. C'est en somme, le concurrent de la règle à calcul. Mais quel concurrent ! Mesurés sur quelques problèmes typiques, les temps nécessaires à la résolution complète tombent de quelques minutes à quelques dizaines de secondes, un gain moyen dans un rapport cinq à dix. La précision obtenue est de l'ordre de dix chiffres significatifs contre trois, quatre au maximum, pour la règle à calcul.

Sa structure s'apparente bien à celle d'un ordinateur. Les données d'entrée sont traitées par un programme, c'est-à-dire des instructions qui s'enchaînent. Celles-ci sont décodées par un organe de commande. Elles sont exécutées par un organe de calcul. Les résultats sont enfin visualisés de façon claire.

À y regarder de près, ces éléments sont bien sûr assez rustiques, et

c'est la notion de « programme » qui peut le plus être controversée. Dans un ordinateur d'architecture moderne, on trouve des « instructions » enregistrées en mémoire à deux niveaux. À un premier niveau se trouve le programme proprement dit. C'est un enchaînement d'instructions dont l'ordre est choisi par l'utilisateur pour résoudre un problème déterminé. Elles sont inscrites en mémoire au moment de traiter ce problème, ou un peu avant, et sont ensuite effacées au moment de l'inscription du programme suivant. Chacune de ces instructions fait appel, lors de son décodage, à une séquence d'instructions plus élémentaires, dont l'ordre a été fixé par le constructeur. Celles-ci sont enregistrées à un second niveau de mémoire, de façon généralement indélébile. C'est la technique de la microprogrammation.

Dans l'ordinateur de poche, c'est seulement le second niveau que l'on retrouve. Le programme proprement dit n'est pas enregistré à un premier niveau avant son exécution. Les instructions sont exécutées au fur et à mesure de leur composition. La programmation est en quelque sorte extérieure à l'ordinateur (Chaque instruction

est plus complexe que celle d'un ordinateur habituel. C'est une véritable fonction qui correspond mieux – ô sublime clarté du vocabulaire informatique – aux notions de « sous-programme » ou de « macro-instruction »).

De même, la notion de mémoire de données n'existe pratiquement pas. Les données sont entrées au fur et à mesure du calcul. Il suffit de pouvoir enregistrer temporairement des résultats intermédiaires, dans les registres de l'organe de calcul pour avoir déjà une souplesse d'utilisation fort appréciable. Comment ces éléments entrent-ils dans un aussi petit volume ? C'est, bien sûr, grâce aux circuits intégrés. Il faut constater d'abord que l'alimentation du calculateur – des batteries rechargeables – occupe pratiquement le tiers du volume. Le clavier nécessaire à l'entrée des données, aussi plat que possible, offre sur la surface disponible trente à quarante touches (les dix chiffres usuels et des « touches de fonction », telles qu'addition ou soustraction, correspondant aux différents types d'opérations du calculateur). La visualisation des résultats se limite à une rangée de chiffres lumineux, comparable à ceux des appareils de mesure électronique.

Le reste, c'est en quelque sorte l'« unité centrale » avec ses trois parties essentielles : l'organe de commande, l'organe de calcul et la mémoire (cette dernière est donc, ici, uniquement une mémoire inaltérable contenant les micro-instructions). Une carte de circuits intégrés à grande échelle suffit pour chacune de ces trois parties. La simplicité de structure est accentuée par le choix d'une organisation

dite « en série ». Qu'est-ce à dire ? Soit, par exemple, à effectuer l'addition de deux nombres : 123 et 254. Dans un ordinateur classique, un « additionneur » ajoute les unités 3 et 4, un autre additionneur les dizaines 2 et 5, un troisième les centaines 1 et 2. Ces trois additions se déroulent « en parallèle » dans le même intervalle de temps (légèrement majoré en réalité pour tenir compte d'éventuelles retenues). Dans un ordinateur simplifié, organisé « en série », un seul et même additionneur ajoute d'abord les unités 4 et 3, puis est utilisé à nouveau pour faire la somme des dizaines, des centaines, etc.

Il en résulte que le temps d'addition total est proportionnel aux nombres manipulés. La conséquence est que, malgré l'emploi de circuits intégrés comparables à ceux des ordinateurs puissants, les temps de calcul pratiques sont de l'ordre du dixième de seconde pour chaque opération élémentaire. Mais c'est bien largement suffisant pour donner l'impression d'instantanéité, qui est le caractère le plus frappant de ces calculateurs de poche.

Et il est de fait que ces appareils apportent, à qui les manipule pour la première fois, un véritable sentiment d'enthousiasme, qui est sans doute pour beaucoup dans leur succès commercial.

Est-ce à dire que la règle à calcul est définitivement détrônée ? Le prix d'un ordinateur de poche est aujourd'hui de l'ordre de 1 000 à 3 000 F. Celui d'une bonne règle à calcul de 50 à 100 F. Quels que soient les progrès, toujours spectaculaires, des prix de l'électronique, il est douteux que l'écart puisse diminuer dans des proportions aussi considérables.

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne les **premières calculatrices** qui permettent de faire rapidement des calculs, dont on ne connaissait auparavant le résultat qu'en consultant des

tables : tables des logarithmes, des cosinus, des sinus, etc. L'invention des calculatrices a ainsi profondément modifié l'enseignement des mathématiques...

S'il hésite peu actuellement à faire acquérir à son patron un calculateur de poche à des fins professionnelles, le particulier balancera certainement lorsqu'il lui faudra l'acheter sur ses fonds personnels. Quels sont les arguments ? Vitesse et précision. Mais est-on vraiment

à quelques minutes près ? A-t-on besoin souvent de dix chiffres significatifs ? Alors, on fait appel à d'autres arguments de vente qui sont de nature plus sentimentale. Il est symptomatique de lire, textuellement, dans une notice de présentation et sous la plume du

constructeur, qu'il s'agit là d'un instrument incomparable « *pour connaître le nombre de jours qu'il vous reste pour acheter un cadeau avant l'anniversaire de votre femme* ». Gageons que celle-ci accepterait volontiers une erreur de quelques jours si l'argent

destiné à l'achat de l'ordinateur de poche s'ajoutait au cadeau, ou aboutissait en fin de compte... dans sa propre poche. ■

Jean-Marc Chabanas
Le Monde daté du 15.09.1973

La guerre des contenus sur mobile s'intensifie

Google a lancé un format pour afficher plus rapidement des pages sur smartphone ou tablette.

Et de trois... Après Facebook et Apple, Google a annoncé, mercredi 7 octobre, une initiative pour doper le Web mobile. Le groupe lance Accelerated Mobile Pages (AMP), un format que tout éditeur pourra utiliser pour publier des pages qui seront lisibles beaucoup plus rapidement quand on les consulte depuis un téléphone ou une tablette. C'est une réponse à la lenteur de chargement de contenus sur support mobile, dénoncée quasi unanimement par ses partenaires, a expliqué Google à la presse, mercredi. Un sujet déjà mis en avant par Facebook et Apple quand ils ont lancé leur propre initiative, respectivement Instant Articles et News.

Concrètement, le format AMP allège le poids d'une page en la simplifiant techniquement, a expliqué Google. Et il utilise le « cache » de Google : le moteur de recherche stockera sur ses serveurs les pages au format AMP comme il stocke déjà les pages de format classique. Mais quand un internaute utilisant un smartphone ou une tablette cliquera sur le lien d'un contenu disponible au format AMP, le fichier « caché » par Google s'affichera, rapidement.

Pour l'heure, Google communique les spécificités de son format, ce qui doit permettre aux éditeurs de publier des pages AMP. Et aux robots de Google de commencer à stocker en cache. Puis, « en 2016 », le groupe commencera à intégrer ces pages dans les résultats de son moteur de recherche.

Point important : le géant du Web et la publicité disposent de partenariats avec d'autres plates-formes puissantes comme

les réseaux sociaux Twitter, Pinterest et LinkedIn. Sur ces derniers, les liens renverront vers les formats AMP des pages, quand ceux-ci seront disponibles. L'éditeur de blogs Wordpress proposera également un plugin (module d'extension) pour publication AMP.

Toucher un lectorat plus jeune
Google dit avoir déjà trente médias partenaires, dont Les Echos, l'anglais *The Guardian*, les américains *The New York Times*, le site Buzzfeed ou *The Washington Post*... Une énumération qui rappelle les titres mis en avant par Apple et Facebook lors de leurs lancements de solutions mobiles.

« Les médias traditionnels doivent atteindre leur lectorat hors de leur propre site Web, aller le chercher où il se trouve », dit Mario Calabresi, directeur du quotidien italien *La Stampa*, adepte d'AMP. En quoi la solution de Google est-elle différente de celles de Facebook et d'Apple ? « Nous avons une approche ouverte du Web et même open source », a argué, mercredi, un responsable de l'équipe « produits » de Google, Danny Bernstein, en référence aux logiciels libres dont le code est public. Pour Google, ce discours est une façon de se démarquer de Facebook et Apple, accusés en creux de proposer des solutions propriétaires, et d'être les tenants d'un Web plus « fermé ».

L'annonce de Google est une réponse aux initiatives de ses rivaux. Ces nouveaux services ont en commun de proposer aux grands médias de publier des articles et des vidéos directement sur les plates-formes, en échange

de l'espoir de toucher un nouveau lectorat plus jeune.

Google et ses concurrents sont conscients que les éditeurs de contenus ont peur de publier sur une autre plate-forme que leur propre site ou application, car ils craignent de perdre une partie de leur pouvoir dans la chaîne de valeur. Et aussi une part de contrôle sur la publicité et sur les données concernant leurs lecteurs. Google a donc décidé de ne prendre aucun pourcentage de la publicité qui sera montrée sur les pages AMP. Et assure que les systèmes de gestion de publicité seront acceptés, même si l'on peut se demander si tous les types de bannières seront utilisables dans AMP, qui est un format allégé. Par ailleurs, Google promet que ces pages « seront comme votre site » ; que les clics seront comptabilisés dans l'audience des éditeurs.

Chez Apple et Facebook, les éditeurs peuvent conserver leurs revenus publicitaires, s'ils ont commercialisé leur contenu. Mais si l'annonceur a été trouvé par Apple ou Facebook, la plate-forme conserve 30 % des revenus. Du côté des données, ces deux entreprises autorisent les éditeurs à suivre les statistiques de leurs articles.

« Google offre toutes les possibilités de monétisation pour les articles publiés sur AMP : les publicités mais aussi les paywalls » donc le paiement à l'acte ou l'abonnement, se réjouit Frédéric Filloux, spécialiste du numérique et éditeur de la Monday Note. Une spécificité mise en avant par Naomi Ramirez, responsable numérique d'El Pais. « AMP a le potentiel de devenir un standard », dit-elle.

C'est aussi l'espoir de Google, dans la bataille qu'il livre contre Facebook et Apple, particulièrement âpre dans le mobile, dont les audiences deviennent primordiales. Pour attirer les éditeurs de sites, les trois plates-formes rivalisent en proposant des solutions plutôt avantageuses. Leur concurrence est un des antidotes contre la dépendance que peut créer, pour les médias, le fait de publier sur ces grandes plates-formes. Qui pourront toujours, éventuellement, faire évoluer plus tard les conditions qu'elles proposent. ■

Alexis Delcambre
et Alexandre Piquard
Le Monde Eco et entreprise
daté du 09.10.2015

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article annonce le lancement d'Accelerated Mobile Pages (AMP), un format de publication des pages qui permettra de les consulter beaucoup plus rapidement depuis un téléphone ou une tablette. Ainsi

les textes mathématiques seront-ils plus facilement accessibles, sans parler des applications sur smartphone permettant de réviser rapidement cours et exercices de mathématiques.

MOTS CLÉS

FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout nombre réel x ;
- $\exp(0) = 1$.

En posant $f : x \mapsto \exp(x) = e^x$, f est l'unique fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

NOMBRE e

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .
- Le nombre e est un nombre irrationnel, voisin de 2,718.
- On dit aussi que le nombre e est la base du logarithme népérien puisque $\ln e = 1$.

LOGARITHME NÉPÉRIEN

- La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.
- Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$. Ce nombre s'appelle le logarithme népérien de a et on le note $x = \ln a$.
- Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

CROISSANCES COMPARÉES

Il s'agit de comparer la croissance de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x$ dans le but de lever certaines indéterminations qui peuvent se présenter lors du calcul de limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

On peut retenir la règle opératoire suivante : à l'infini, l'exponentielle de x « l'emporte » sur la fonction $x \mapsto x$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Lorsqu'on passe d'un terme d'une suite au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre, la suite est géométrique. On parle alors de croissance exponentielle.

Fonction exponentielle

C'est en recherchant des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est proportionnelle à la fonction que l'on est conduit à l'étude de la fonction exponentielle. Celle-ci joue un rôle capital en mathématiques car c'est une fonction de référence qui intervient dans de nombreuses lois de probabilité.

Comment la fonction exponentielle est-elle définie ?

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes :

- Pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x , on a : $e^x \times e^{-x} = 1$.

Conséquences : $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2,718$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $e^{0,5} = \sqrt{e}$.

Comment varie la fonction exponentielle ?

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x , en posant $f(x) = e^x$, on a $f'(x) = f(x)$.

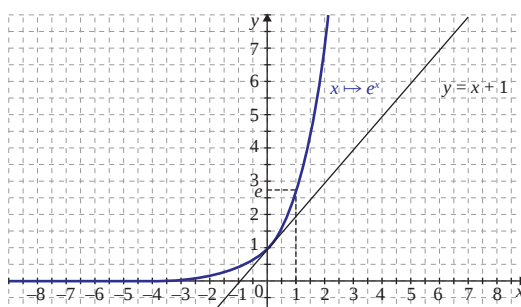
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Pour tout nombre réel x , $e^x > 0$, la fonction exponentielle est donc strictement croissante.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = e^x$		+	
$f(x) = e^x$	0		$+\infty$

Courbe représentative de la fonction exponentielle



Quelles sont les propriétés de la fonction exponentielle ?

- Relation fonctionnelle : quels que soient les réels x et y , on a : $e^x \times e^y = e^{x+y}$.
- Quels que soient les réels x et y , on a $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
- Pour tout nombre réel x , on a : $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.
- Pour tout nombre réel x , on a : $e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$.
- Pour tout nombre réel x et pour tout entier n , on a : $(e^x)^n = e^{nx}$.

Quelle est la dérivée de la fonction e^u ?

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors pour tout réel x appartenant à I , on a : $(e^u)' = u' e^u$.

Équation et inéquation avec la fonction exponentielle

Soit a et b deux nombres réels.

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$.
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).
- $e^a > e^b$ si et seulement si $a > b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).
- Si, de plus, $b \in \mathbb{R}_+^*$: $e^a = b$ si et seulement si $a = \ln b$.

Quelles sont les limites usuelles de la fonction exponentielle ?

Aux bornes de l'ensemble de définition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\text{Nombre dérivé en } 0 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1.$$

Croissances comparées de fonctions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• Pour ne pas fondre, le cœur des puces se fragmente p. 25
(Le Monde daté du 02.03.2005)

Liban (mai 2013)

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$.

On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donnée en annexe.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$.

Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x .

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur l'annexe, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

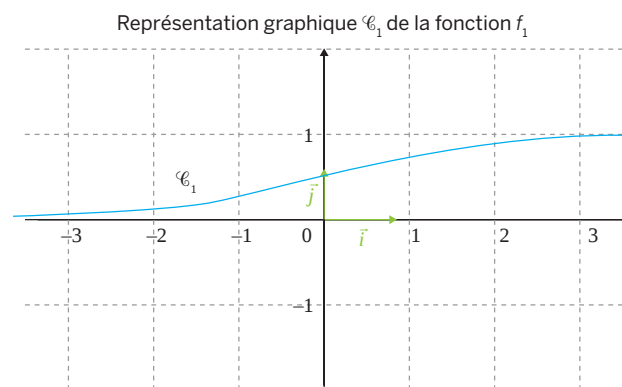
Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

Annexe



La bonne méthode

Partie A

1. Pour la recherche des limites, penser à les ramener à des limites usuelles. Quant à l'interprétation graphique, penser aux asymptotes.
2. Deux méthodes possibles : soit remplacer e^{-x} par $\frac{1}{e^x}$, soit multiplier la fraction par e^x , au numérateur et au dénominateur.
3. Deux méthodes : soit on prend la première forme de f_1 , en utilisant la formule donnant la dérivée de $\frac{1}{u}$, soit la seconde forme de f_1 , en utilisant la formule donnant la dérivée de $\frac{u}{v}$.
4. Utiliser la forme de f_1 de la question 2., en remarquant qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{u'}{u}$ pour déterminer une primitive de f_1 .

Partie B

1. Prendre la seconde forme de f_1 pour effectuer le calcul plus facilement.
2. Calculer l'ordonnée du point K .
3. Constaté que les deux courbes sont symétriques afin de tracer $\mathcal{C}_{-1}$.
4. Utiliser la symétrie de la question précédente et la valeur de I calculée précédemment.

Partie C

1. Établir une double inégalité stricte.
2. Dérivée f_{-1} et conclure.
3. Partir de l'inéquation $k \geq 10$, puis par inégalités successives, conclure.

EXERCICES PAS À PAS

Inde (avril 2013)

Partie A

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.



Le graphique en annexe représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps, en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$ où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres. On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie B

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 250]$ par $f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$.

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f).

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 250]$.

2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

3. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a $f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$.

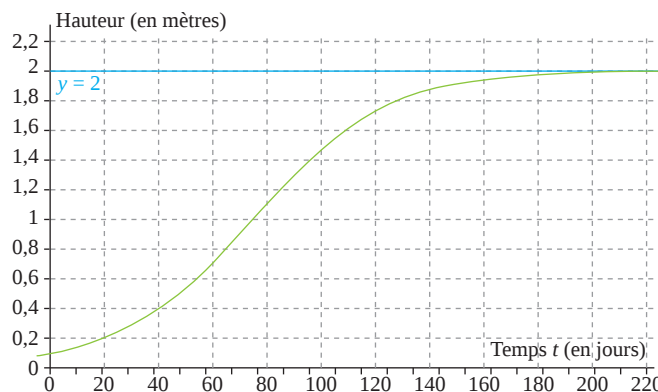
Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .

- b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f . La vitesse

de croissance est maximale pour une valeur de t . En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

Annexe



La bonne méthode

Partie A

Interpréter la limite de la fonction f en $+\infty$ par rapport à la situation concrète, ce qui permettra, avec la valeur en 0 de déduire les coefficients a et b .

Partie B

1. Vérifier que la fonction proposée est la même que celle déterminée précédemment, puis utiliser les formules sur les dérivées.

2. Traduire l'énoncé sous la forme d'une inéquation, puis utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme pour résoudre cette inéquation et répondre au problème.

3. a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de l'expression initiale de $f(t)$ par $e^{0,04t}$. Dérivée F et conclure.

- b) Utiliser la formule de la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$.

Utiliser la primitive déterminée à la question 3. a) pour calculer l'intégrale.

4. En utilisant le fait que la pente de la tangente en un point M de la courbe représentative de f est égale au nombre dérivé en ce point, lire sur le graphique le point en lequel la pente semble être maximale.

Pour ne pas fondre, le cœur des puces se fragmente

La loi de Moore, énoncée puis aménagée.

Le 19 avril 1965, dans la revue *Electronics*, Gordon Moore énonçait ce qui allait passer à la postérité sous le nom de « loi de Moore ». Le directeur de la R & D de Fairchild Technologies – cofondateur, en 1968, de la société Intel – assurait que le nombre de transistors intégrés sur une même surface de silicium allait, à l'avenir, doubler environ tous les ans.

M. Moore se fondait sur les progrès réalisés au cours des toutes premières années de production des puces de silicium. Depuis qu'elle a été formulée, Intel a quelque peu aménagé le fameux principe pour le faire correspondre à la réalité industrielle. La société annonce ainsi sur son site Internet que ses processeurs

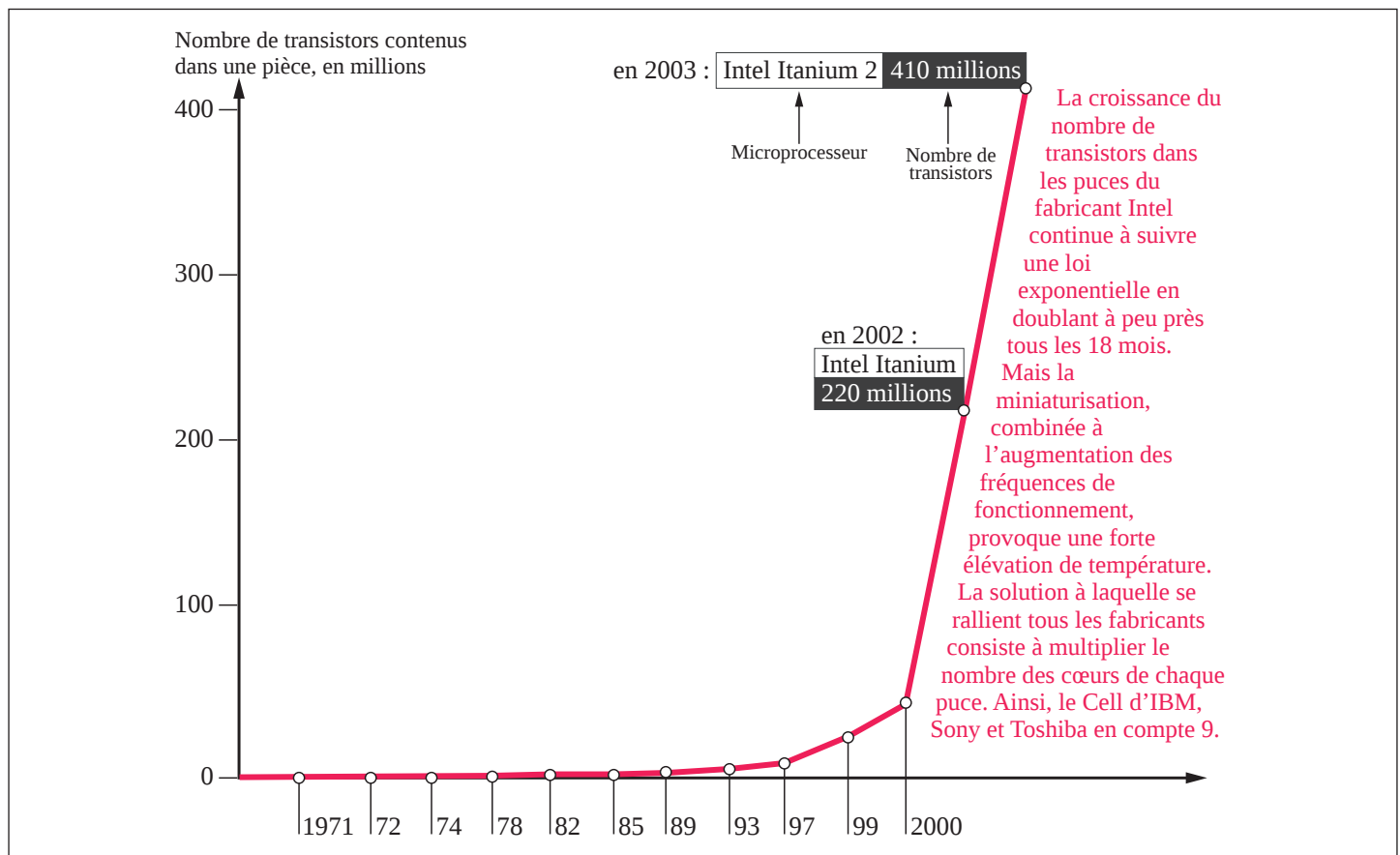
ont toujours évolué selon le principe d'un doublement du nombre de composants par unité de surface tous les dix-huit à vingt-quatre mois et non tous les ans. Cependant, l'idée essentielle de M. Moore, celle d'une augmentation exponentielle du nombre de composants intégrés, demeure juste. ■

Le Monde daté du 02.03.2005

POURQUOI CET ARTICLE ?

Un exemple, parmi d'autres, de **quantités dont la croissance en fonction du temps est exponentielle** : le nombre de transistors dans les puces du fabricant Intel.

D'après les conjectures de Moore (« loi de Moore »), la croissance des performances des appareils électroniques est exponentielle.



La miniaturisation face au mur de la chaleur

MOTS CLÉS

LOGARITHME NÉPÉRIEN

• Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$. Ce nombre s'appelle le logarithme népérien de x et on le note $y = \ln x$.

• La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. On a donc $\ln 1 = 0$ et pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f .

FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Elle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout nombre réel x ;
- $\exp(0) = 1$.

NOMBRE e

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .
- Le nombre e est un nombre irrationnel, voisin de 2,718.
- On dit aussi que le nombre e est la base du logarithme népérien puisque $\ln e = 1$.

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION $\ln$

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (relation fonctionnelle).
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.
- $\ln(a^n) = n \ln a$.
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

DÉRIVÉE DE $\ln u$

Pour une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I , on a : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ sur l'intervalle I .

Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est très utile pour simplifier certaines expressions mathématiques. Elle permet de convertir une multiplication en addition, une division en soustraction, une puissance en multiplication, une racine en division et de résoudre des équations et des inéquations contenant des exponentielles.

Elle est utilisée pour définir le pH d'une solution en chimie et l'intensité d'un bruit en physique. On utilise également une échelle logarithmique pour l'échelle de Richter qui mesure la magnitude d'un tremblement de terre.

Comment la fonction logarithme népérien est-elle définie ?

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la seule fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, qui, à tout réel strictement positif x , associe l'unique solution réelle de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$. On note cette solution $y = \ln x$.



John Napier (1550-1617), mathématicien écossais à l'origine des premières tables logarithmiques. Le logarithme népérien a été baptisé ainsi en son hommage.

Conséquences : quel que soit le nombre réel x strictement positif, on a :

- pour tout réel y : $e^y = x$ si et seulement si $y = \ln x$;
- $e^{\ln x} = x$;
- pour tout nombre réel y : $\ln(e^y) = y$;
- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Comment la fonction logarithme népérien varie-t-elle ?

On a donc $\ln 1 = 0$ et pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque : la fonction logarithme népérien est aussi définie comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

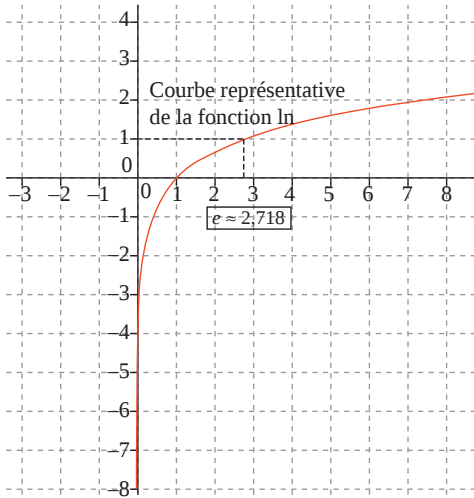
Pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

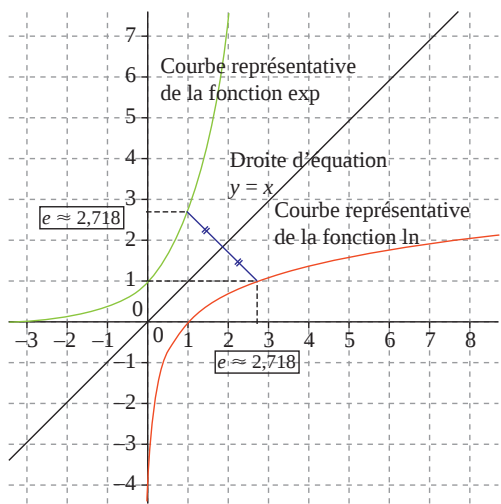
Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	(0)	$+\infty$

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien



Les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Quelles sont les propriétés algébriques de la fonction $\ln$?

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, et n un nombre entier.

■ Relation fonctionnelle : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

■ logarithme népérien d'un quotient :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ;$$

■ logarithme népérien d'un inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a ;$

■ logarithme népérien d'une puissance entière : $\ln(a^n) = n \ln a ;$

■ logarithme népérien d'une racine carrée :

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a.$$

Exemple : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 ; \ln 3 + \ln 4 + \ln \frac{1}{12}$
 $= \ln(3 \times 4) - \ln 12 = \ln 12 - \ln 12 = 0.$

Équation et inéquation avec la fonction logarithme népérien

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

■ $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;

■ $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes) ;

■ $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).

Exemple : $\ln(3x + 1) > 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x + 1) > \ln 4$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 > 4 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1.$$

Quelles sont les limites usuelles de la fonction logarithme népérien ?

Aux bornes de l'ensemble de définition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Nombre dérivé en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ (ou en 1 de la fonction $\ln$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Croissances comparées de fonctions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Logarithme décimal

Le logarithme décimal est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$

Remarque : $\ln 10 > 0$ donc la fonction $\log$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et $\log 1 = 0.$

Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal sont les mêmes que celles de la fonction logarithme népérien.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• Les mathématiques des fractales luttent contre le bruit p. 29
 (Hervé Morin, *Le Monde* daté du 12.07.2003)

MOTS CLÉS

LIMITES USUELLES

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty ;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ;$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

CROISSANCES COMPARÉES

Il s'agit de comparer la croissance des fonctions logarithme népérien et $x \mapsto x$ dans le but de lever certaines indéterminations qui peuvent se présenter lors du calcul de limites.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$
- On peut retenir la règle opératoire suivante : à l'infini, la fonction $x \mapsto x$ « l'emporte » sur le logarithme népérien.

ZOOM SUR...

LE LOGARITHME DÉCIMAL

- La fonction logarithme décimal est la fonction notée $\log$ et définie sur $]0 ; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$
- Très utilisée pour les calculs numériques avant l'introduction des calculatrices, la fonction logarithme décimal a aussi de nombreuses applications, notamment en chimie et physique.

LES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION $\log$

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n :

- $\log(ab) = \log a + \log b$ (relation fonctionnelle) ;
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b ;$
- $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a ;$
- $\log(a^n) = n \log a ;$
- $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a.$

En particulier pour $a = 10$, on a : $\log 10^n = n \log 10 = n$ car $\log 10 = 1.$ La fonction inverse du logarithme décimal est la fonction qui, à un réel x , associe le nombre strictement positif $10^x = e^{x \ln 10}$ qui est l'exponentielle de base 10.

Sujet inédit

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ par $f(x) = -x \ln x + 2x$.

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ par : $f'(x) = -\ln x + 1$.
2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$.
b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.
3. On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées). Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ dans ce repère.
4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$, sur l'intervalle $[1; 10]$.
a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).
b) Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

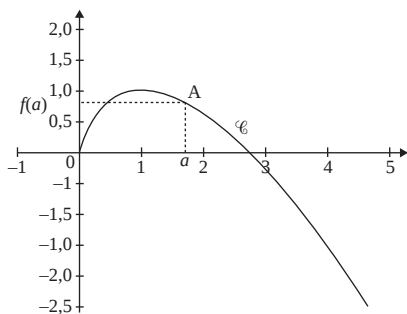
La bonne méthode

1. Un terme de l'expression de f est un produit.
2. **a)** Résoudre $-\ln x + 1 > 0$; $-\ln x + 1 < 0$; $-\ln x + 1 = 0$.
b) Il faut déduire le tableau de variation de la question précédente.
3. Pour représenter graphiquement la fonction f , on peut s'aider d'un tableau de valeurs.
4. **a)** Pour déterminer le nombre de solutions, il faut observer la courbe.
b) Pour donner une valeur approchée de la ou des solutions, il faut obtenir un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice, en changeant le pas de l'intervalle.

Métropole (sept. 2010)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x(1 - \ln x)$.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Partie A. Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse a .
a) Déterminer, en fonction du nombre réel a , les coordonnées du point A', point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

- b)** Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a) . Sur la figure, construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie B. Aire sous une courbe

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$. Justifier que $\mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

La bonne méthode

Partie A

1. Étudier le signe de chaque facteur du produit de l'expression de $f(x)$.
2. Utiliser les opérations sur les limites et les croissances comparées de fonctions.
3. La fonction f est de la forme $u \times v$ donc : $f' = (u \times v)'$
4. **a)** Déterminer l'équation de la tangente (T_a) au point A d'abscisse a . L'abscisse du point A' est 0.
b) Pour un point A d'abscisse a donné, il faut trouver une méthode pour placer le point A'. On a $(T_a) = (AA')$.

Partie B

Il faut distinguer les deux cas et montrer que l'égalité est vraie dans les deux cas.

Les mathématiques des fractales luttent contre le bruit

Un mur acoustique mis au point par un laboratoire de l'École polytechnique et la société Colas permet de réduire de façon importante les sons engendrés par la route et le rail grâce à ses motifs dentelés.

« Nous n'avons malheureusement pas de pistolet. »

Au pied de son mur antibruit, Didier Peyrard, directeur technique de la société Somaro, filiale du géant de la construction routière Colas, ne peut parfaire sa démonstration. Les creux et pyramides moulés dans ce panneau de béton de bois sont censés absorber les sons de façon inégale. Mais l'écran de 4 mètres de côté érigé sur le parking du centre de recherche de l'industriel, dans les Yvelines, ne permet pas à une oreille profane de faire la différence.

Les mesures effectuées en relation avec le laboratoire de physique condensée de l'École polytechnique sont pourtant formelles : ces pleins et ces déliés absorbent les basses fréquences avec une efficacité de 68 % plus élevée que celle d'un mur classique. Et le fameux test du pistolet, standardisé, a bien montré que la réflexion des ondes sonores était diminuée de 8 décibels acoustiques – dB(A) –, tandis que la transmission – les sons capables de traverser l'écran – était réduite de 57 dB(A).

On mesure mieux les progrès obtenus lorsque l'on sait que les mesures de bruit se faisant à partir d'une échelle logarithmique, cela signifie qu'une diminution de 3 dB(A) correspond à une réduction de moitié du volume sonore perçu par l'oreille humaine. Au total, résume Jean-Luc Gautier, chef du projet mur antibruit chez Colas, les simulations numériques indiquent que, pour un riverain, le mur permettrait de réduire de 2,7 dB(A) la nuisance occasionnée par le trafic routier, « soit 45 % de

mieux que les meilleurs matériaux actuels ».

Cette performance tient en un concept un peu passé de mode, les fractales, qui désignent des formes géométriques ayant la faculté de se reproduire à l'identique à différentes échelles. Les branches du chou-fleur ou de l'arbre bronchique, tout comme la découpe du littoral en sont des exemples fournis par la nature, avant que les mathématiciens – dont le Français Benoît Mandelbrot – ne formalisent des fonctions reproduisant des motifs similaires.

En acoustique, « nous sommes partis du principe que l'absorption sonore serait proportionnelle à la surface développée au contact des ondes sonores », explique Bernard Sapoval, co-inventeur du procédé et chercheur au laboratoire de physique condensée de Polytechnique. Les fractales offrent justement la particularité d'accroître la surface de contact. Tout comme le contour d'une côte rocheuse est virtuellement de longueur infinie, si on se donne pour objet de le suivre à l'échelle du grain de sable et non à celle de la carte routière.

« Cinq fois plus efficace »

Le chercheur a testé cette hypothèse sur de petites chambres d'enregistrement où étaient disposés des obstacles d'irrégularité croissante. « Les mesures ont confirmé l'intuition de départ. Une salle de concert fractale serait très mauvaise », indique Bernard Sapoval, qui voit dans l'utilisation de ces structures irrégulières une généralisation théorique, du fait que les chambres anéchoïques,

conçues pour museler les ondes sonores, fonctionnent mieux lorsque les murs de pyramide de mousse qui les tapissent sont irréguliers. « L'énergie est concentrée à l'endroit où elle est absorbée, ce qui renvoie au concept de localisation faible en physique », indique le chercheur.

Le rôle des irrégularités géométriques dans l'absorption sonore est confirmé par Franck Sgard, du Laboratoire des sciences de l'habitat de l'École nationale des travaux publics de Lyon, dont l'équipe travaille à la mise au point de revêtements perforés destinés à l'équipement des véhicules. « On utilise en effet ce concept d'hétérogénéité pour alléger les produits en augmentant la capacité acoustique », indique le chercheur. Le mur de Colas n'est pourtant pas irrégulier, dans la mesure où le motif est répétitif, mais sa forme vise bien à multiplier les surfaces de contact. « Notre brevet propose une forme qui serait cinq fois plus efficace », assure Bernard Sapoval. Mais cette géométrie aurait été difficile à mettre en œuvre par moulage et reste encore trop onéreuse.

La solution choisie constitue donc un compromis. Retenir d'abord une bonne matière première pour fabriquer les panneaux : le béton de bois, formé de copeaux de pin mélangés à du ciment, dont les qualités phoniques sont connues depuis longtemps. Lui adjoindre ensuite un peu de savoir-faire : celui de Didier Peyrard qui ajoute à l'ensemble une « poudre de perlimpinpin » – il n'en dit pas plus – qui facilite le démoulage en dépit des formes chantournées du motif.

Colas espère commercialiser ce produit à partir de début 2004, tant dans le secteur routier que ferroviaire. Le marché existe : le bruit est l'une des nuisances les plus fréquemment citées dans les enquêtes d'opinion. On évalue à 200 000 en France le nombre de logements affectés par des niveaux sonores excédant 65 dB(A), niveau généralement considéré comme un seuil de gêne et de fatigue. ■

Hervé Morin

Le Monde daté du 12.07.2003

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne le niveau de l'intensité I (en watt/m²) d'un bruit qui est défini à l'aide du logarithme par :

$$10 \log \frac{I}{I_0} \text{ décibels (db) avec } I_0 = 10^{-12} \text{ watt/m}^2.$$

Autre exemple : le pH d'une solution aqueuse est également défini avec le logarithme : $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$, où $[\text{H}^+]$ est exprimée en mole par litre.

Lorsque les grandeurs sont définies avec le logarithme, elles ne sont pas proportionnelles entre elles, mais proportionnelles à leur logarithme : on parle de **croissance logarithmique**.

MOTS CLÉS

FONCTION CONTINUE

- Une fonction f , définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a , est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Une fonction f , définie sur un intervalle I ouvert, est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a , appartenant à I .
- Une fonction f , définie sur un intervalle $[a; b]$, est « continue sur $[a; b]$ » lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]a; b[\\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{array} \right.$$

INTÉGRALE

Pour f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I , $\int_a^b f(x) dx$ est le réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I .

AIRE SOUS UNE COURBE

Lorsqu'une fonction f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ correspond à « l'aire sous la courbe » : elle est égale à l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f , exprimée en unités d'aire.

UNITÉ D'AIRE (u.a.)

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, une unité d'aire est l'aire du rectangle formé avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f' .

FONCTION DÉRIVÉE

- Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x , est appelée fonction dérivée de f . Elle est notée f' .

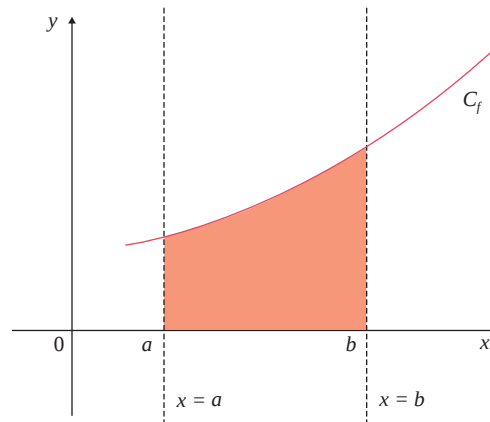
Intégration

Pour calculer l'aire de la surface comprise entre une courbe et l'axe des abscisses, on peut approcher cette surface par une série de bandes rectangulaires de largeur infinitésimale. L'intégrale de la fonction représentée par cette courbe est, au signe près, égale à la somme de leurs aires.

L'intégration est donc un outil précieux pour calculer l'aire de surfaces délimitées par des courbes dont on connaît les équations (mais aussi de volumes dont on connaît les éléments du solide). Cette branche des mathématiques a de nombreuses utilisations en physique et en économie.

Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Soit C_f sa courbe représentative. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ en unités d'aire. On la note $\int_a^b f(x) dx$.



Dans un repère orthogonal $(O, \vec{O}_1, \vec{O}_2)$, on considère le point K de coordonnées $(1; 1)$.

Une unité d'aire représente l'aire du rectangle $OIKJ$.

Qu'est-ce qu'une primitive ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I lorsque F est dérivable sur I et que sa dérivée est égale à f sur cet intervalle.

Lorsqu'une fonction admet une primitive, on peut en trouver une infinité. En effet, si on ajoute

n'importe quel nombre réel à la primitive trouvée, les dérivées des primitives ainsi obtenues donneront la même fonction, car la « dérivée d'un nombre réel est nulle ».

Exemple : $F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 15$; $K(x) = x^2 - 1$... $K(x) = x^2 + k$ avec k appartenant à l'ensemble des réels.

Toutes ces fonctions sont dérivables sur l'ensemble des réels.

Si on dérive toutes ces fonctions, on obtient une seule fonction définie par $f(x) = 2x$.

Comment calculer une primitive, une intégrale ?

Une primitive, lorsqu'elle existe, est une fonction.

Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et c est un nombre réel, alors cF est une primitive de cf sur I .

Exemple : la fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive sur l'ensemble des nombres réels de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la fonction définie par $G(x) = 3x$ est une primitive de la fonction définie par $g(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de la fonction $f + g$ sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction $F + G$ définie par $F(x) + G(x) = \frac{x^3}{3} + 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent, par « lecture inverse », le tableau des primitives suivant où c est une constante.

$f(x)$	$F(x)$	D_f
k avec $k \in \mathbb{R}$	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \neq 1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + c$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$] 0 ; +\infty [$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$

Une intégrale, lorsqu'elle existe, est une valeur réelle. Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors elle admet une primitive F telle que $F'(x) = f(x)$.

On a alors : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : $\int_1^2 2x dx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.

Comment calcule-t-on la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle ?

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est égale au réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b, c) \in I^3$.

On a : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , $(a, b) \in I^2$ et $k \in \mathbb{R}$.

On a : $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ et

$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

Positivité de l'intégrale

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.

Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$ on a : $f(x) > 0$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

En corollaire : si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, on a $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Intégration par parties*

Le choix de la technique d'intégration par parties se rencontre souvent (mais pas nécessairement) lorsque la fonction à intégrer se présente sous la forme d'un produit.

Soient u et v deux fonctions dérivables, de dérivées u' et v' sur l'intervalle $[a; b]$.

On a $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$, car une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv .

Mais aussi $\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ en calculant la dérivée de la fonction $(uv)'$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale.

D'où $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$, puis : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

(Théorème de l'intégration par parties)

Exemple : la primitive de la fonction logarithme qui s'annule en 1 est la fonction F (de variable t), définie sur $]0; +\infty[$, par $F(t) = \int_1^t \ln(x) dx$.

On procède alors au calcul de cette intégrale avec la formule de l'intégration par parties, en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$, soit $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$: $F(t) = \int_1^t 1 \times \ln(x) dx = [x \ln x]_1^t - \int_1^t x \times \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^t - \int_1^t 1 dx = t \ln t - \ln 1 - [x]_1^t = t \ln t - t + 1$.

Ainsi, les fonctions de la forme $t \mapsto t \ln t - t + k$, $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

* Non exigible au baccalauréat mais important à connaître.

MOTS CLÉS

LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

• Soient α et β deux nombres réels et f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$: $[\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

• Cette propriété est utilisée pour simplifier les écritures des intégrales.

RELATION DE CHASLES

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels appartenant à I , alors :

$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

VALEUR MOYENNE

Soient a et b deux réels distincts et f une fonction continue sur $[a; b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est égale au réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

• Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, telle que pour tout x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

• L'inégalité de la moyenne fournit un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ dans le cas où la fonction considérée est bornée sur l'intervalle $[a; b]$.

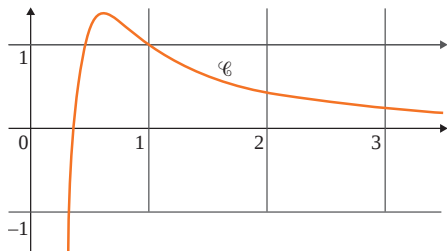
INTÉGRATION PAR PARTIES

• Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ telles que les fonctions u' et v' soient continues sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

• Si l'on choisit judicieusement les fonctions u et v , le théorème d'intégration par parties permet de remplacer un calcul d'intégrale par le calcul d'une autre intégrale plus simple. Il permet aussi d'établir des relations de récurrence entre les termes d'une suite d'intégrales.

Amérique du Nord (mai 2013)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a)** Étudier la limite de f en 0.
b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. **a)** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}.$$
b) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln x > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
3. **a)** Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.
a) Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln x}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle.

- b)** Calculer I_n en fonction de n .
- c)** Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

La bonne méthode

1. **a)** Utiliser la limite de la fonction logarithme népérien en 0^+ .
b) Utiliser les propriétés des limites, en particulier les sommes et produits de limites.
c) Interpréter graphiquement chacune des deux limites.
2. **a)** Utiliser la formule de la dérivée d'un quotient.
b) Montrer que le signe de f' est celui de $-1 - 2\ln x$, puis résoudre l'inéquation demandée. Conclure.
c) En dressant le tableau de variation, ne pas oublier de placer les bornes et les limites.
3. **a)** Un point appartient à l'intersection de deux ensembles si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux ensembles.
b) Utiliser le tableau de variation précédent et le point d'intersection trouvé.
4. **a)** Interpréter l'aire à l'aide d'une intégrale et utiliser la primitive donnée dans l'énoncé.
b) Utiliser la primitive donnée dans l'énoncé.
c) Utiliser les limites usuelles des fonctions $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ quand x tend vers $+\infty$.

Liban (juin 2010)

On considère la suite u_n définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$.

1. **a)** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
b) Calculer u_1 . En déduire u_0 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
3. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

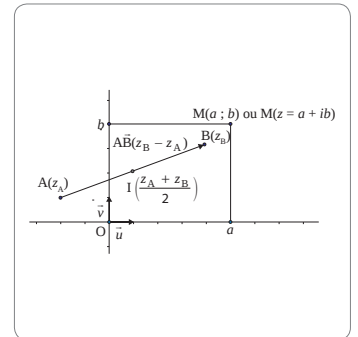
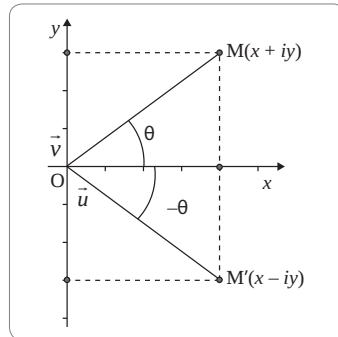
$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$
b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

La bonne méthode

1. **a)** Utiliser la définition de la suite puis la linéarité de l'intégrale.
b) Remarquer que, pour une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction à valeur strictement positive, une primitive est la fonction $\ln(u)$.
2. Déterminer le signe de la fonction intégrée dans la définition de u_n .
3. **a)** Méthode analogue à celle utilisée au 1. **a)**.
b) Utiliser l'inégalité trouvée précédemment pour obtenir la majoration demandée.
4. Utiliser la majoration précédente et le théorème des gendarmes, conclure.

GÉOMÉTRIE



MOTS CLÉS

NOMBRE COMPLEXE

- Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$, pour lequel x et y sont deux nombres réels, et i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

PARTIE RÉELLE, PARTIE IMAGINAIRE

Tout nombre complexe z admet une unique écriture algébrique $z = x + iy$:

- x s'appelle la partie réelle de z ; on la note $\operatorname{Re}(z)$.
- y s'appelle la partie imaginaire de z ; on la note $\operatorname{Im}(z)$.

IMAGINAIRE PUR

Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle. Par exemple, le nombre complexe $5i$ est imaginaire pur.

NOMBRE COMPLEXE CONJUGUÉ

- Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.
- Un nombre complexe et son conjugué ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

MODULE

Le module du nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, est le réel positif noté $|z|$, défini par $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ARGUMENT

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, pour le nombre complexe $z \neq 0$ d'image M , on appelle argument de z ($\arg z$) toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u} ; \vec{OM})$.

MODULO 2π

L'écriture « $[2\pi]$ » (modulo 2π) est synonyme de « à $2k\pi$ près pour une valeur entière de k ».

IDENTITÉ REMARQUABLE

Les identités remarquables sont également valables dans $\mathbb{C}$.

Pour deux nombres complexes a et b , on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 ; \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 ; \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b).\end{aligned}$$

Nombres complexes

Au XVI^e siècle, les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli introduisirent des nombres « imaginaires », ayant un carré négatif, pour résoudre des équations du troisième degré. Deux siècles plus tard, Euler et d'Alembert parachevèrent la création des nombres complexes et fixèrent les notations actuelles, en particulier celle du nombre i . Aujourd'hui, les nombres complexes sont utilisés non seulement dans toutes les branches des mathématiques, en particulier en trigonométrie et en géométrie, mais aussi dans d'autres sciences, comme la physique. Dans cette leçon, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

**i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.**

Quelles sont les différentes formes sous lesquelles peut se présenter un nombre complexe non nul ?

Un nombre complexe z , non nul, admet trois types d'écriture :

- une écriture **algébrique** :

$z = x + iy$, où x et y sont deux nombres réels ;
 $x = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle de z et $y = \operatorname{Im}(z)$, sa partie imaginaire ;

- une écriture **trigonométrique** :

$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, où r désigne le **module** de z et θ un **argument** de z ;

- une écriture **exponentielle** : $z = re^{i\theta}$.

Selon le cas, on privilégie une écriture parmi les trois.

Comment calculer le module et un argument d'un nombre complexe non nul ?

Si le nombre complexe z est donné sous sa forme algébrique $z = x + iy$, on commence par calculer le module r à l'aide de la formule :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Puis on détermine un argument θ de z en calculant :
 $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{y}{|z|}$.

Soient deux nombres complexes z et z' . Dans le cas où $Z = zz'$, le module de Z est égal au produit des modules de z et de z' . Et l'argument de Z est égal à la somme des arguments de z et de z' , modulo 2π .

Cela signifie que :

$$\arg Z = \arg z + \arg z' [2\pi]$$

$$|Z| = |zz'| = |z| \times |z'|$$

Dans le cas où $Z = \frac{z}{z'}$ ($z' \neq 0$), le module de Z s'obtient en divisant le module de z par le module de z' . Et l'argument de Z est égal à la différence des arguments de z et de z' , modulo 2π .



Le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783).

Cela signifie que :

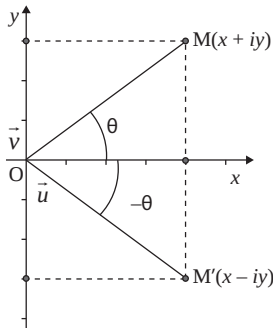
$$\arg Z = \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$|Z| = \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Qu'est-ce qu'un nombre complexe conjugué ?

Le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ est le complexe $\bar{z} = x - iy$.

Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z et M' pour affixe $\bar{z}$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel égal au carré de leur module commun : $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Le **conjugué de la somme** est égal à la **somme des conjugués** :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' = (x + x') - i(y + y').$$

Le **conjugué du produit** est égal au **produit des conjugués** :

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' = (xx' - yy') - i(xy' + xy').$$

Comment résoudre une équation dans l'ensemble des nombres complexes ?

On rencontre essentiellement trois types d'équations dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

Dans le cas d'une **équation du premier degré** de la forme $az + b = c$, avec $a \neq 0$, les méthodes de résolution sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'une **équation du second degré** à coefficients réels de la forme $az^2 + bz + c = 0$, où a est un réel non nul, on calcule le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une **racine double réelle** : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux **racines réelles** :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux **racines complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dans le cas d'une équation faisant intervenir $\bar{z}$, le conjugué de z , ou son module $|z|$, on pose $z = x + iy$, puis on fait appel au théorème suivant : deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même **partie réelle** et même **partie imaginaire**.

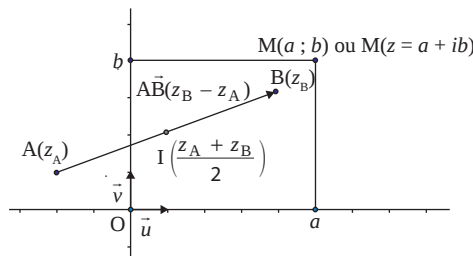
Quel lien y a-t-il entre la géométrie plane et les nombres complexes ?

Les nombres complexes constituent un outil privilégié pour résoudre de manière simple de nombreux problèmes de géométrie.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, l'**image du nombre complexe $z = a + ib$** est le **point M de coordonnées (a, b)** . On dit alors que z est l'**affixe** du point M.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.

L'affixe du milieu I du segment [AB] est la demi-somme des affixes des points A et B.



Il est impératif de connaître aussi :

■ le lien entre les **distances** et les **modules** :

$$AB = |z_B - z_A|;$$

■ le lien entre les **angles** et les **arguments** :

$$(\bar{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi].$$

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• **Kantorovitch, le planificateur révolutionnaire** p. 37
(Cédric Villani, *Le Monde Science et techno* daté du 22.09.2012)

MOTS CLÉS

FORME CANONIQUE

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$), un trinôme du second degré dans $\mathbb{C}$.

$$P(z) = a \left[\left(z - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ est}$$

la forme canonique du trinôme.

DISCRIMINANT

Pour l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, les solutions de l'équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$ où $a \neq 0$ sont :

• Si $\Delta > 0$, **deux racines réelles**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• Si $\Delta = 0$, **une racine réelle double**

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

• Si $\Delta < 0$, **deux racines complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

IMAGE

L'image du nombre complexe $z = x + iy$ est le point de coordonnées $M(x; y)$.

AFFIXE

• L'affixe du point M $(x; y)$ du plan complexe est le nombre complexe $z = x + iy$.

• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B - z_A$.

ZOOM SUR...

L'EXPRESSION CONJUGUÉE

• L'**expression conjuguée** du nombre complexe $a + ib$ (a et b deux réels) est $a - ib$.

• On a la relation $z\bar{z} = |z|^2$ pour tout nombre complexe z .

• On utilise l'**expression conjuguée** d'une expression pour rendre réel le dénominateur d'un nombre complexe écrit sous la forme d'une fraction :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2} =$$

$$\frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Pondichéry (avril 2013)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$. À tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$. On désigne par I le milieu du segment $[AM]$. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à (OA) , la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2 OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question, et uniquement dans cette question, on prend

$$Z_M = 2e^{-\frac{\pi}{3}}.$$

a) Déterminer la forme algébrique de $Z_{M'}$.

b) Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$.

c) Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .

b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e) Montrer que $BM' = 2 OI$.

La bonne méthode

1. a) On a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Dédurre le premier résultat de la question 1. a).

c) Calculer Z_I à l'aide de Z_A et de Z_M .

2. a) Calculer Z_I à l'aide de Z_A et de $Z_M = x + iy$.

b) Utiliser la définition de $Z_{M'}$.

c) Le nombre complexe $z = x + iy$ a pour coordonnées $(x; y)$.

d) Calculer $\overline{OI} \cdot \overline{BM'}$ pour conclure.

e) Comparer les quantités BM'^2 et $(2 OI)^2$.

Asie (juin 2013)

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i; b = -\sqrt{3} + i; c = 1 + i\sqrt{3}; d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et}$$

$$e = -1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

1. Affirmation 1 : les points A, B et C sont alignés.

2. Affirmation 2 : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

La bonne méthode

1. Utiliser la colinéarité des vecteurs.

2. Calculer et comparer les valeurs BE^2 , CE^2 et DE^2 .

Polynésie (juin 2013)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet :

a) une solution

b) deux solutions

c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

La bonne méthode

1. Pour deux nombres réels θ et θ' , $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}. \text{ Penser à écrire } i \text{ sous la forme exponentielle.}$$

2. Poser $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels et se rappeler que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales, ainsi que leurs parties imaginaires.

Kantorovitch, le planificateur révolutionnaire

Il y a cent ans s'éteignait Henri Poincaré, symbole de l'unité des sciences et du génie créatif ; la même année naissait Alan Turing, figure tutélaire de l'informatique. Ce double anniversaire lié à des scientifiques d'exception ne doit pas en faire oublier un troisième : celui de la naissance, à Saint-Petersbourg, de Leonid Kantorovitch (1912-1986), qui révolutionna l'économie mathématique.

Couvrant un spectre allant du plus abstrait au plus concret, Kantorovitch se passionna pour des sujets aussi divers que les espaces topologiques partiellement ordonnés, la bombe atomique, le calcul scientifique, l'optimisation linéaire, la tarification des taxis ou l'évacuation de Leningrad assiégée par les armées allemandes.

En 1938, le destin frappe à sa porte : une entreprise de contreplaqué vient lui demander de l'aide pour améliorer sa production ; il s'agit de trouver le meilleur algorithme de distribution du bois brut vers les machines qui le transformeront. En reformulant de manière simple et abstraite ce problème de recherche opérationnelle, Kantorovitch

exploite cette opportunité au-delà de l'imaginable : pour obtenir la solution, il développe, en même temps que Dantzig et Koopmans, la théorie de la programmation linéaire, qui s'applique à tous les problèmes où la quantité que l'on souhaite maximiser est une combinaison linéaire des inconnues.

En 1942, il découvre que sa théorie comprend le problème du transport optimal, formulé par Gaspard Monge en 1781 : déterminer le meilleur appariement entre des sites de production et de consommation afin de minimiser le coût du transport des marchandises. L'étude de ce problème le mène à jeter les bases d'une théorie mathématique des prix – un acte de courage politique autant que scientifique, quand on sait toute l'idéologie dont la notion de prix était chargée en Russie soviétique. Les travaux de Kantorovitch furent frappés par la censure d'Etat ; il en fallait plus pour le décourager, conscient qu'il était de l'importance vitale de ses travaux pour la patrie.

Ses méthodes mathématiques appliquées à l'économie,

POURQUOI CET ARTICLE ?

Les nombres complexes, notion algébrique, permettent de résoudre des problèmes de géométrie et d'analyse. Avec Kantorovitch, le décloisonnement entre les différents domaines des mathématiques s'accélère. Espaces topologiques partiellement ordonnés, bombe atomique, calcul scientifique, optimisation linéaire, tarification des taxis, évacuation de

Leningrad assiégée par les armées allemandes, applications à l'économie et à la géométrie, en passant par la théorie des probabilités non commutatives et la physique statistique, les travaux du mathématicien s'appliquent à de nombreux sujets. Cet éclectisme de bon aloi a été couronné par un prix Nobel d'économie en 1975.

décrites dans son chef-d'œuvre « La meilleure allocation des ressources » (1959), sont aujourd'hui plus présentes que jamais, à une heure où la programmation linéaire, en centaines ou en milliers de variables, est utilisée routinièrement par d'innombrables entreprises dans le monde. En 1975, Kantorovitch devenait, avec Koopmans, le premier mathématicien à recevoir le prix Nobel d'économie.

Ce n'était pas la fin de l'histoire, loin de là ; dans les trois années qui suivirent le décès de Kantorovitch, en France, en Angleterre, aux Etats-Unis, on découvrait de manière

inattendue et simultanée des applications du transport optimal en mécanique des fluides, en météorologie et en théorie des systèmes dynamiques. C'était le début d'une nouvelle révolution qui ferait de la théorie de Kantorovitch l'un des domaines les plus multiformes et dynamiques des sciences mathématiques actuelles, allant de l'économie à la géométrie en passant par la théorie des probabilités non commutatives et la physique statistique. ■

Cédric Villani

Le Monde Science et techno
daté du 22.09.2012

MOTS CLÉS

VECTEUR DIRECTEUR

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ est **non nul** et si la droite $\mathcal{D}$ est **parallèle** à la droite (AB) .

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

L'espace est rapporté au repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ est caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

VECTEUR NORMAL

On appelle vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$, tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, un plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

VECTEURS COLINÉAIRES

$\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u} \neq \vec{0}$ quand il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

DROITES COPLANAIRES

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. Deux droites distinctes coplanaires sont soit sécantes, soit strictement parallèles.

VECTEURS ORTHOGONAUX

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

- Deux droites de l'espace sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Une droite est parallèle à un plan de l'espace si ses vecteurs directeurs sont orthogonaux aux vecteurs normaux du plan.
- Deux plans sont parallèles si les vecteurs normaux de l'un sont colinéaires aux vecteurs normaux de l'autre.

Géométrie dans l'espace

L'étude des objets de l'espace déjà abordée dans les classes antérieures se poursuit en terminale : on apprend à caractériser droites et plans par des relations vectorielles, à déterminer une équation cartésienne d'un plan, à définir une représentation paramétrique d'une droite. On étudie la position relative de droites et de plans de l'espace et on étend le produit scalaire à l'espace.

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Quelles sont les deux manières de caractériser une droite ?

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace contenant un point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b; c)$. On peut caractériser cette droite de deux manières.

Caractérisation vectorielle :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Caractérisation par un système d'équations paramétriques (représentation paramétrique) :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Quelles sont les deux manières de caractériser un plan ?

Soit $\mathcal{P}$ un plan de repère $(A; \vec{u}; \vec{v})$ et $\vec{n}$, de coordonnées $(a; b; c)$, un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. On peut caractériser ce plan de deux manières.

Caractérisation vectorielle :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } k' \in \mathbb{R}.$$

Caractérisation par une équation cartésienne :

le plan $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Comment caractériser un segment ?

Caractérisation vectorielle :

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \text{ avec } k \in [0; 1].$$

Comment étudier la position relative de deux droites de l'espace ?

On souhaite étudier la position relative de deux droites de l'espace : la droite $\mathcal{D}$ passant par A, de

vecteur directeur $\vec{u}$, et la droite $\mathcal{D}'$ passant par A', de vecteur directeur $\vec{u}'$. Pour cela, il suffit d'étudier leurs **vecteurs directeurs**.

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont **colinéaires**, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

Deux cas sont alors possibles :

■ si A appartient à $\mathcal{D}'$, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues ;

■ si A n'appartient pas à $\mathcal{D}'$, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles, leur intersection est vide. Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ **ne sont pas colinéaires**, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont soit sécantes (leur intersection est un point), soit non coplanaires (leur intersection est vide).

Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

On souhaite étudier la position relative d'une droite $\mathcal{D}$ passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$. On s'intéresse alors aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont **orthogonaux**, alors la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Si, en outre, le point A appartient au plan $\mathcal{P}$, alors la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Sinon, la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$ et leur intersection est vide.

Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ **ne sont pas orthogonaux**, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants ; leur intersection est un point. Si, par ailleurs, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont **colinéaires**, alors la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Comment étudier les positions relatives de deux plans ?

On considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

Point de vue géométrique : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **parallèles** si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont **colinéaires**. Deux cas sont alors possibles : soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus et leur intersection est un plan ; soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles et leur intersection est vide.

Sinon $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont **sécants** et leur intersection est une droite.

Point de vue algébrique : soient $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ les équations cartésiennes respectives des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Pour étudier l'intersection de ces deux plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Soit ce système n'a pas de solutions, soit il en a une infinité.

Ainsi, une **droite de l'espace** peut être représentée par un **système de deux équations linéaires**, composé des équations cartésiennes de deux plans sécants selon cette droite (on remarque que ce système n'est pas unique).

Quelles sont les différentes manières de calculer un produit scalaire ?

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2].$$

Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, on a aussi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$.

Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Quand on calcule un produit scalaire en géométrie non analytique, on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs et se ramener ainsi à des calculs de produits scalaires sur des vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

Quels sont les cas particuliers à connaître et leurs utilisations ?

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Deux **vecteurs** de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si leur **produit scalaire** est nul.

Si deux vecteurs non nuls de l'espace sont colinéaires, alors $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Pour démontrer que deux droites de l'espace $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales, on montre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Quelles sont les propriétés du produit scalaire ?

Pour effectuer des **calculs vectoriels** avec des produits scalaires, on utilise les propriétés suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Pour tout réel k , $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- Le carré scalaire de $\vec{u}$ est : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.



Icosaèdre en trois dimensions vu de face.

MOTS CLÉS

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

- Soit une droite $\mathcal{D}$ coupant un plan $\mathcal{P}$ en un point I , on dit que la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont orthogonaux si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à deux droites de $\mathcal{P}$ passant par I .
- Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (non nécessairement coplanaires) sont orthogonales si les parallèles à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passant par un point M quelconque sont perpendiculaires.
- Deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

REPÈRE ORTHONORMAL

Un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormal lorsque les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, $\vec{i}$ et $\vec{k}$, et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux et ont la même norme.

PRODUIT SCALAIRE

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$.

- Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

RELATION DE CHASLES

Quels que soient les points A , B et C de l'espace : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

CARRÉ SCALAIRE

Le carré scalaire du vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel $\|\vec{u}\|^2$, noté $\vec{u}^2$. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ si $\vec{u}(x ; y ; z)$, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

NORME

La norme d'un vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$ est le nombre réel positif noté $\|\vec{u}\|$ tel que $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$.

PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ tel que :

- $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$;
- $k\vec{u}$ a même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$;
- $k\vec{u}$ est de sens opposé à $\vec{u}$ si $k < 0$;
- la longueur de $k\vec{u}$ est celle de $\vec{u}$ multipliée par $|k|$ (valeur absolue de k).

DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

• **De la géométrie d'Euclide à la localisation par satellite** p. 41
(Jean-François Augereau, *Le Monde* daté du 25.05.2000)

• **Smartphones pédagogues** p. 42
(David Larousserie, *Le Monde* daté du 25.09.2014)

Amérique du Nord (mai 2013)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; -1 ; -2) et D(7 ; -1 ; 4).

- Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.
 - Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
- Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
 - Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 - Vérifier que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 - La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

La bonne méthode

- Vérifier que deux vecteurs, judicieusement choisis, sont non colinéaires.
- Montrer qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.
 - Un vecteur directeur de la droite est donc un vecteur normal du plan.
 - Vous connaissez les coordonnées d'un point de la droite et de l'un de ses vecteurs directeurs.
 - Les coordonnées $(x ; y ; z)$ du point d'intersection H de Δ et (ABC) vérifient simultanément leurs deux équations.
- Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Deux plans sécants étant deux plans non parallèles, que peut-on en déduire quant à leurs vecteurs normaux ?
 - Vérifier que les points de cette droite appartiennent aux deux plans.
 - Comparer un vecteur directeur de d et un vecteur normal de (ABC).

Métropole (sept. 2010)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite

dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$
 où t désigne un nombre réel.

- Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Justifier.
 - Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
- Soit $\mathcal{Q}$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.
 - Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$.
 - Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $\mathcal{Q}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
 - Montrer que $CI = \sqrt{3}$.
- Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.

- Vérifier que, pour tout nombre réel t , $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
- Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

La bonne méthode

- Montrer que les coordonnées du point C vérifient l'équation du plan.
 - Montrer qu'un point de $\mathcal{D}$ appartient toujours à $\mathcal{P}$.
- Déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}$. On a $C \in \mathcal{Q}$.
 - Le point I vérifie les équations de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{Q}$.
 - Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$.
- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM_t}$.
On a $CM_t^2 = \overrightarrow{CM_t} \cdot \overrightarrow{CM_t}$.
 - Étudier la fonction $t \mapsto CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

De la géométrie d'Euclide à la localisation par satellite

Les mathématiques sont au cœur de notre quotidien. Elles occupent tous les secteurs des sciences, de l'industrie et même ceux de la finance (*Le Monde* du 6 juin 1998). Le temps n'est plus, confirme Jean-Benoît Bost, professeur à l'université Paris-Sud, « où l'on se posait la question de savoir si les recherches en maths étaient très utiles et à quoi elles pouvaient bien servir », et les découvertes d'aujourd'hui s'appuient sur celles, considérables, d'hier.

La géométrie euclidienne témoigne de cette longue continuité. « Aux questionnements d'Euclide, rappelle Alain Connes, ont répondu les recherches sur la géométrie non euclidienne, qui ont stimulé la géométrie de Riemann, qui, elle-même, a inspiré Albert Einstein pour ses travaux sur l'espace-temps et la relativité générale utilisée pour affiner le système de positionnement par satellite GPS. » Sans cette continuité, on ne saurait positionner un véhicule à la surface de la Terre à quelques dizaines de centimètres près. Sans elle, les entreprises de travaux publics qui creusaient le tunnel sous la Manche auraient eu du mal à faire se rencontrer avec précision leurs tunneliers sous la surface des eaux.

Pourtant, « alors qu'il existe des secteurs industriels dont les fondements s'identifient clairement à une science, il n'existe a priori rien de tel pour les mathématiques », regrette Jean-Pierre Bourguignon, directeur de l'Institut des hautes études scientifiques (IHES). Or, dans beaucoup de domaines, les mathématiques sont un puissant levier, car le progrès doit prendre en compte des situations critiques où il faut des outils puissants « pour dire des choses pertinentes ». Ce qui ne signifie pas, avertissent aussitôt Alain Connes et Stéphane Mallat, professeur au département de mathématiques appliquées de l'École polytechnique, que tout se résout avec un ordinateur et un peu de simulation. Tout est affaire de recherche, d'intelligence et de mariage entre les besoins et les outils mathématiques disponibles. La théorie des ondelettes est une belle illustration de cette difficile et féconde alchimie. « À l'origine, ce travail est né des efforts d'un ingénieur pétrolier qui faisait de la prospection sismique, raconte Stéphane Mallat. Il a été repris et développé par un spécialiste de la mécanique quantique, puis intégré dans une théorie mathématique cohérente dans les années

1985-1990, ce qui a ouvert de nouveaux débouchés tout à fait surprenants. » Aujourd'hui, avec le nouveau standard de compression d'images, les ondelettes sont déjà à bord de certains satellites et vont bientôt envahir Internet, les systèmes multimédias et les postes de télévision. Le traitement du signal, autrefois fondé sur les travaux d'un mathématicien du siècle dernier, Joseph Fourier, est ainsi dynamisé par l'afflux de ces nouveaux outils mathématiques.

Expliquer inlassablement

« De même, rappelle Stéphane Mallat, la dynamique des fluides doit beaucoup au mathématicien suisse Euler, qui avait reçu commande d'une fontaine incroyable. Dans un autre domaine, la firme ATT a pu, grâce à de nouveaux algorithmes, multiplier les capacités de son réseau téléphonique en optimisant le routage des communications. Enfin, le succès du logiciel Catia (Dassault), utilisé par les industries qui font du design (automobile, aéronautique, etc.), fait appel à des outils qui doivent aussi bien aux équations différentielles qu'à la géométrie... d'Euclide. »

À l'énoncé de ces exemples, on pourrait ne croire qu'aux seules

vertus utilitaristes des mathématiques ne devenant alors qu'une trousse à outils pour les autres disciplines scientifiques. « Rien ne serait plus mauvais », prévient Jean-Michel Lemaire, du CNRS, qui reconnaît cependant qu'« il faudrait coupler mieux les objets mathématiques qu'on enseigne à certaines réalités ». « Sur le fond, ajoute Jean-Pierre Bourguignon, il ne faudrait pas que cet élargissement des relations des mathématiciens avec la société les dispense de leurs obligations traditionnelles, à savoir expliquer inlassablement comment des questions apparemment gratuites se révèlent finalement apporter des réponses à d'autres questions que l'on ne se posait pas au moment où ces méthodes sont apparues. »

Ainsi, le commentaire malheureux du mathématicien anglais Godfrey Hardy, qui estimait que les vraies mathématiques n'auraient jamais aucune application militaire, demande à être médité. Ne serait-ce que parce que la théorie des nombres premiers joue un rôle essentiel, via la cryptographie, dans le monde du renseignement et dans celui d'Internet. ■

Jean-François Augereau
Le Monde daté du 25.05.2000

Smartphones pédagogiques

En général, les smartphones sont proscrits des cours. Sauf de ceux de Joël Chevrier, où ils sont même recommandés. Ce professeur à l'université de Grenoble, chercheur à l'Institut Néel, développe depuis trois ans une pédagogie utilisant le téléphone portable pour faire des expériences de mécanique.

« **C**es objets ont une puissance de frappe phénoménale », constate l'enseignant en énumérant les caractéristiques qui l'intéressent : capteurs de mouvement, d'accélération, de lumière, boussole, micro... « Et bientôt capteurs de pression et de température. On va pouvoir faire aussi des cours de thermodynamique », s'enthousiasme-t-il. Joël Chevrier songe à mettre un téléphone dans un piston pour faire comprendre à ses étudiants, en mesurant les pressions et températures in situ, comment fonctionne un moteur à quatre temps.

« Nous allons chercher la couche de science au cœur de ces appareils et la faisons ressortir dans un but pédagogique », résume-t-il.

Les épreuves sont rudes pour ces bijoux de technologie : pendus au bout de son câble de charge pour en faire un pendule ; lâchés en chute libre pour étudier la gravitation ; secoués dans une essoreuse à salade pour faire comprendre la force centrifuge ou encore posés sur le siège d'un tramway pour reconstituer la trajectoire du véhicule sans le GPS. Grâce à un logiciel développé avec des collègues du Centre interuniversitaire de

microélectronique et nanotechnologies à Grenoble, les données du téléphone sont envoyées à un ordinateur et modélisées en temps réel sur l'écran.

« On peut refaire tout le programme classique de mécanique avec un téléphone », estime Joël Chevrier, qui voudrait bien coller son smartphone sur un pendule de Foucault et ainsi observer la rotation de la Terre sur elle-même. Mais la puissance technologique ne dispense pas d'un effort pédagogique. « L'écueil à éviter est l'anecdote ou le bric-à-brac. Le téléphone est au service des notions à enseigner, et non le contraire », prévient-il. Il lui semble donc prudent de ne diffuser ces principes au collège ou au lycée qu'après avoir formé les enseignants et défini une sorte de mode d'emploi.

« Une pédagogie nouvelle »

Joël Chevrier travaille aussi, au sein du projet Science et design financé par l'Agence nationale de la recherche, avec des designers afin de faciliter l'accès aux

données. Selon lui, une telle utilisation du téléphone à l'école est un mouvement émergent, auquel participent une centaine d'enseignants dans le monde. Une revue américaine à destination de ce public a même créé une rubrique sur le sujet. La biologie pourrait elle aussi être concernée : en 2011, une équipe américaine avait transformé un smartphone en microscope avec une petite bille de verre. « C'est une pédagogie nouvelle dont il faut aussi évaluer l'efficacité », prévient Joël Chevrier, qui s'est associé à des collègues sur ces questions. En attendant, il rêve de nouveaux projets, utilisant notamment une autre fonction de ces appareils : leur capacité à... communiquer. L'idée serait de reproduire l'expérience d'Eratosthène qui, au III^e siècle avant notre ère, a mesuré le rayon de la Terre en comparant des mesures d'ombre en deux lieux distants de 800 kilomètres. ■

David Larousserie

Le Monde daté du 25.09.2014

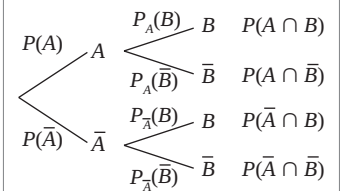
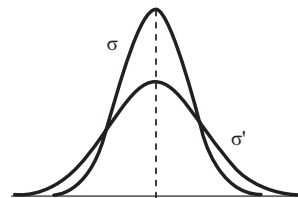
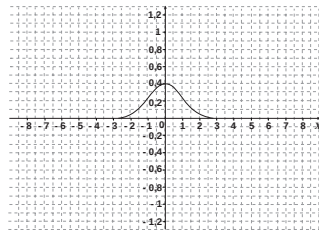
POURQUOI CET ARTICLE ?

Longtemps proscrits durant les cours, les smartphones pourraient bien faire leur entrée en classe dans un futur proche. Leurs applications pédagogiques sont en effet nombreuses, qu'il s'agisse de mécanique, de géolocalisation ou encore de thermodynamique. En géométrie, les smartphones pourraient servir à reproduire l'expé-

rience d'Eratosthène qui, au III^e siècle avant notre ère, a mesuré le rayon de la Terre en comparant des mesures d'ombre en deux lieux distants de 800 kilomètres, un problème classique de géométrie dans l'espace ou de géométrie plane, selon la façon de le présenter, que les candidats au bac pourront rencontrer en cours.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; \right. \\ \left. p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$



MOTS CLÉS

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend du hasard.

UNIVERS

Soit E une expérience aléatoire. On appelle univers l'ensemble constitué de toutes les issues possibles de cette expérience.

ÉVÉNEMENT

• Soit E une expérience aléatoire et $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, l'univers associé à E . On appelle événement de l'expérience aléatoire E tout sous-ensemble de Ω .

• On appelle événement élémentaire, un événement constitué d'un seul élément de Ω , c'est-à-dire constitué d'une seule issue $\{e_i\}$.

• La probabilité $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

ISSUES ÉQUIPROBABLES

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire E .

Si toutes les issues ont la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$, on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité.

CARDINAL (D'UN ENSEMBLE)

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note $\text{card } E$.

PARTITION

• Une partition est un ensemble d'événements qui séparent en « paquets distincts » toutes les issues d'une expérience (c'est-à-dire l'univers). Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ réalisent une partition de l'univers Ω si : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.

• On considère souvent la partition élémentaire $A, \bar{A}$.

VARIABLE ALÉATOIRE

Soient E une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Une variable aléatoire X est simplement une application qui, à chaque issue de l'univers, associe un nombre réel. Autrement dit, en langage fonctionnel, c'est une fonction de l'univers dans l'ensemble des nombres réels, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Probabilités conditionnelles

Les probabilités conditionnelles prennent en compte les informations concernant l'issue d'une expérience qui modifient la probabilité des événements liés à cette expérience. On parle de probabilités conditionnelles lorsque deux événements d'une expérience aléatoire se réalisent l'un après l'autre. On regarde alors l'influence du premier sur le second.

Qu'est-ce qu'une probabilité ?

On part d'une expérience aléatoire E , on détermine l'univers Ω (l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire) ; on a $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Définir une probabilité, c'est associer à chaque issue e_i un nombre p_i de façon que les deux propriétés suivantes soient vérifiées : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Généralement, pour déterminer les probabilités (les nombres p_i), on a deux possibilités :

■ soit on fait une **hypothèse d'équiprobabilité** et on associe à toutes les issues la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$;

■ soit on fait une **étude statistique** et on définit alors p_i comme la fréquence de l'issue e_i au cours d'un grand nombre de répétitions.

La **probabilité d'un événement A** dans le cas équiprobable est :

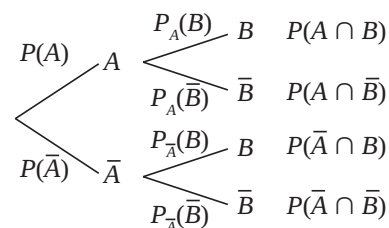
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

Ce qu'on énonce parfois sous la forme :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B quelconques de probabilités non nulles. L'événement A est réalisé puis l'événement B . On peut visualiser la situation en utilisant un arbre pondéré :



La « probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé », notée $P_A(B)$, peut se calculer en utilisant un arbre.

En effet, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$,

$$\text{donc } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ (si } P(A) \neq 0 \text{)}.$$

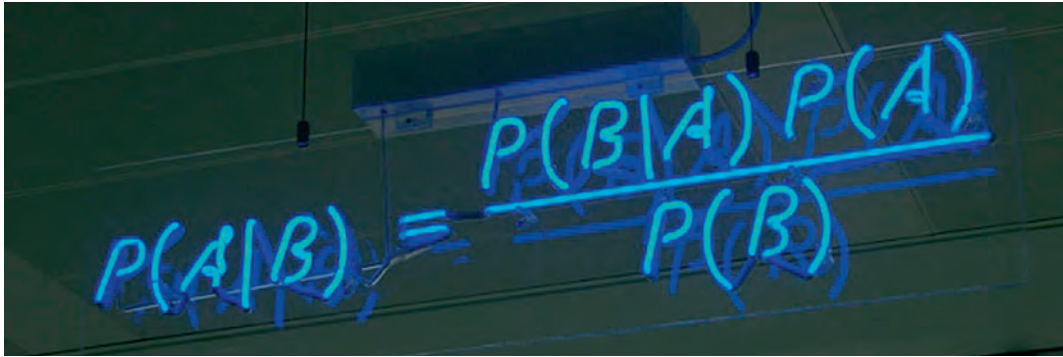
Par analogie, on en déduit que la « probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé », notée $P_B(A)$, sera égale à : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (si $P(B) \neq 0$).

Propriétés : $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$;

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} ;$$

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C).$$

Exemple : dans une population lycéenne, 40 % des élèves aiment les mathématiques, 25 % aiment la physique et 10 % aiment à la fois les mathématiques et la physique. On prend un élève au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il aime la physique, sachant qu'il aime les mathématiques ? Soit A l'événement « l'élève aime les mathématiques » et B l'événement « l'élève aime la physique ». L'énoncé donne $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,1$. On cherche la probabilité pour que l'élève aime la physique sachant



Formule de Bayes

qu'il aime les mathématiques, c'est-à-dire la probabilité de B sachant A : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

Comment montrer que deux événements sont indépendants ?

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un de ces événements n'influe pas sur la probabilité de l'autre. On doit donc avoir : $P_A(B) = P(B)$. A et B sont donc indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Attention à ne pas confondre incompatibles et indépendants :

■ A et B sont donc **incompatibles** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = 0 ;$$

■ A et B sont donc **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Comment utiliser la formule des probabilités totales ?

Ayant une partition $A_1, A_2, \dots, A_n$, on considère un événement B quelconque. En écrivant que les issues qui constituent B se séparent en celles qui appartiennent à A_1 , celles qui appartiennent à A_2 , ..., celles qui appartiennent à A_n , on obtient :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n).$$

Sachant que $P(B \cap A_i) = P(A_i)P_{A_i}(B)$, on peut aussi écrire :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Dans le cas de la partition élémentaire avec A et $\bar{A}$, pour tout événement B , on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

E est une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Soit une variable aléatoire X définie sur Ω . $X(\Omega)$

étant l'ensemble des valeurs prises par X , on a $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$.

La **loi de probabilité de X** attribue à chaque valeur x_i la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$ constitué de les événements élémentaires dont l'image par X est x_i .

On la présente généralement sous la forme d'un tableau à double entrée :

X	x_1	x_2	...	x_n	total
P	p_1	p_2	...	p_n	1

On a alors $0 \leq p_i \leq 1$, avec $p_i = P(X = x_i)$, et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Qu'est-ce qu'une loi binomiale ?

On considère une expérience aléatoire E , un événement A lié à E de probabilité non nulle, avec $P(A) = p$. On appelle « succès » la réalisation de A et « échec » celle de $\bar{A}$.

On **répète** n fois l'expérience E dans des **conditions identiques** et de manière indépendante. Soit X la variable aléatoire comptant le **nombre de succès** au cours des n répétitions. X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $B(n, p)$.

On a alors :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\} \\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p. \end{cases}$$

DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

• **La théorie des jeux et la question du bon choix** p. 47-48

(Philippe Pajot, *Le Monde* daté du 07.05.2013)

• **Magie des nombres ou nombres en folie** p. 43-49

(Robert Matthews, *Le Monde* daté du 14.11.1996)

MOTS CLÉS

ÉVÉNEMENTS DISJOINTS

On dit que deux événements A et B sont disjoints ou incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune issue (ou événement élémentaire) en commun. Dans ce cas, on a :

- $P(A \cap B) = \emptyset$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ESPÉRANCE

• Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $p_i = P(X = x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Autrement dit, la loi de X est :

X	x_1	x_2	...	x_n	total
P	p_1	p_2	...	p_n	1

L'espérance de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

• L'espérance est la « moyenne » des valeurs prises par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience.

VARIANCE

• Soit X une variable aléatoire sur une population de taille n :

X	x_1	x_2	...	x_p	total
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	n

n_i est l'effectif de x_i (nombre de fois où l'on prend la valeur x_i).

• Soit $\bar{X}$ la moyenne de X . La variance de X est le nombre noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = \frac{1}{n} [n_1 (x_1 - \bar{X})^2 + n_2 (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + n_p (x_p - \bar{X})^2].$$

• On a aussi : $V(X) =$

$$\frac{1}{n} [n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_p x_p^2] - \bar{X}^2.$$

• La variance est un paramètre de dispersion de la série. Elle mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

ÉCART TYPE

• L'écart type d'une série statistique simple ou d'une variable aléatoire X est le nombre $s(X)$ égal à la racine carrée de la variance :

$$s(X) = \sqrt{V(X)}.$$

• L'écart type mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

Métropole (juin 2013)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;

H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;

H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;

C : « l'arbre choisi est un conifère » ;

F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .

c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.

d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? (On arrondira à 10^{-3} .)

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment

important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? (On arrondira à 10^{-3} .)

c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins 2 feuillus ? (On arrondira à 10^{-3} .)

La bonne méthode

1. a) Interpréter les données de l'exercice et les placer dans l'arbre pondéré.
- b) Appliquer la formule des probabilités composées.
- c) Mettre en évidence une partition, puis appliquer la formule des probabilités totales.
- d) Appliquer la formule des probabilités conditionnelles.
2. a) Vérifier les conditions permettant de prouver que X suit bien une loi binomiale.
- b) Utiliser la formule de la loi binomiale.
- c) Utiliser la notion d'événement contraire et la formule de la loi binomiale.

Métropole (juin 2011)

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) ;

– la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement : « la personne est contaminée par le virus », et T l'événement : « le test est positif ». $\bar{V}$ et $\bar{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T .

1. a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$ et $P_{\bar{V}}(\bar{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. (Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .)

La bonne méthode

1. a) Utiliser les données de l'énoncé.
- b) Appliquer la formule des probabilités composées.
2. Utiliser la formule des probabilités totales.
3. a) Utiliser la formule des probabilités conditionnelles.
- b) Utiliser de nouveau la formule des probabilités conditionnelles, ainsi que la probabilité de l'événement complémentaire.

La théorie des jeux et la question du bon choix

En matière de probabilités, il faut se méfier de son intuition. Les mathématiciens du jeu permettent d'y voir plus clair et d'optimiser la prise de décisions.

« **G**ouverner, c'est choisir », disait Pierre Mendès France. S'il n'est pas toujours facile de gouverner, au moins la théorie des jeux et ses outils en pleine expansion peuvent-ils nous aider à faire des choix raisonnés dans bien des situations pratiques : organisation des réseaux de communication, ordonnancement des tâches, gestion du flux automobile ou des mariages...

Commençons par quelques questions pour montrer que notre intuition des probabilités est facilement faussée, induisant de mauvais choix. À partir de combien de personnes réunies dans une pièce la probabilité de trouver une date d'anniversaire commune est-elle supérieure à $1/2$? La réponse est 23. Et, dès qu'il y a 57 personnes, cette probabilité monte à 99 %. Ces réponses qui peuvent choquer l'intuition première sont pourtant bien établies par les calculs élémentaires de probabilité.

Autre exemple troublant. Vous participez à un jeu où l'on vous montre trois portes fermées. Derrière l'une de ces trois portes se trouve un prix (dont on suppose qu'il vous intéresse...) et rien derrière les deux autres portes. Première étape, le meneur de jeu vous demande de désigner une porte (mais il ne l'ouvre pas). Deuxième étape : le meneur ouvre une des deux autres portes où il n'y a rien. Il reste donc deux portes closes, l'une avec un prix derrière et l'autre avec rien. Dans cette dernière étape, celle de l'ouverture de la porte, le

meneur de jeu vous demande si vous préférez conserver votre choix initial et ouvrir cette porte, ou bien si, au contraire, vous préférez changer de choix et ouvrir l'autre porte. Autrement dit, qu'avez-vous intérêt à faire pour maximiser vos chances de gagner ? Il vaut mieux changer de choix et ouvrir l'autre porte, car vous aurez alors deux chances sur trois de gagner le prix, alors que vous n'en aurez qu'une sur trois si vous persistez dans votre choix initial.

Si vous n'êtes pas convaincu, imaginez le même jeu où l'on vous demande de désigner une carte au hasard parmi 52 cartes face cachée, puis on retourne 50 autres cartes qui ne sont pas l'as de pique. Parmi les deux cartes restantes, où pensez-vous que se cache l'as de pique ? Les probabilités sont dans ce cas de $1/52$ si vous conservez votre choix initial et de $51/52$ (un peu plus de 98 %) si vous modifiez votre choix, parce que vous aurez retourné en tout 51 cartes sur 52. Décliné sous la forme de jeux télévisés à partir des années 1960, ce « paradoxe de Monty Hall » a fait le bonheur de présentateurs dont tout le talent (et l'intérêt) consistait à convaincre les candidats naïfs de ne pas changer de choix... La bonne connaissance des caractéristiques d'un jeu peut ainsi aider à gagner. Comme au black jack, un jeu de cartes américain qui se joue dans les casinos, où cette connaissance peut se révéler précieuse : les personnes qui parviennent à se souvenir des cartes déjà sorties

peuvent analyser leur probabilité de gagner, en fonction des cartes qui ne sont pas sorties, et miser au bon moment. Plusieurs équipes ont défrayé la chronique, utilisant cette technique dite du comptage de cartes pour berner nombre de casinos à travers le monde.

Les choix stratégiques que l'on peut faire, par exemple lors d'une élection, sont concernés également par des considérations probabilistes, menant parfois à des paradoxes. Ainsi, il est possible, lors d'un vote où l'on demande de classer trois candidats (A, B et C) par ordre de préférence, qu'une majorité de votants préfère A à B, qu'une autre préfère B à C, mais qu'une autre choisisse C plutôt que A ! C'est parce que la relation de préférence n'est pas transitive que ce paradoxe, énoncé par Nicolas de Condorcet en 1785, apparaît.

Ce sont les mêmes genres de relation de non-transitivité que l'on trouve dans le jeu populaire pierre-feuille-ciseaux. Au-delà de la compréhension individuelle de la multitude de jeux qui existent, les mathématiciens ont commencé à formaliser des problèmes de stratégies et de choix à travers la théorie des jeux. Le jeu s'entend ici comme une confrontation entre deux joueurs, comme le cas du jeu pierre-feuille-ciseaux, mais avec un gain variable associé à chaque victoire, de sorte que l'on puisse opter pour une stratégie qui optimise ce gain au bout d'un certain temps.

Des considérations économiques donc qui guident les pionniers de cette formalisation, dont le mathématicien américain John von Neumann donnera le premier exemple à travers son théorème du minimax, démontré en 1928. Ce théorème stipule que dans un jeu à deux joueurs et de somme nulle (la somme des gains potentiels de tous les joueurs est nulle), il existe une valeur moyenne représentant ce que peut gagner le premier joueur au détriment du second joueur si ceux-ci jouent de manière rationnelle (c'est-à-dire en cherchant à optimiser leurs gains). C'est un autre mathématicien, John Nash, qui étendra dans les années 1950 les travaux de von Neumann en s'attaquant aux jeux à plus de deux joueurs à somme non nulle (la somme des gains de tous les joueurs peut être quelconque). Il établira la notion d'équilibre de Nash : un point d'équilibre du jeu où tous les joueurs se disent satisfaits du résultat. Par exemple, dans le jeu pierre-feuille-ciseaux, un équilibre de Nash est atteint si les joueurs jouent chaque coup avec une probabilité de $1/3$. Pour ce résultat et d'autres contributions en théorie des jeux, Nash recevra le prix Nobel d'économie en 1994.

Cet intérêt des économistes pour la théorie des jeux s'est accéléré dernièrement. Alors que le prix Nobel d'économie récompensait le plus souvent des résultats en économie pure, en sciences sociales ou sur les négociations, les derniers prix Nobel, dont celui attribué au mathématicien américain Lloyd

Shapley en 2012, témoignent de la montée en puissance de la théorie algorithmique des jeux. Le problème de l'équilibre de Nash, c'est que, bien qu'il s'agisse de points stables sur le plan théorique, dans un jeu complexe, rien ne garantit que l'on va converger vers ces points. Dans la plupart des cas, ils sont incalculables.

Mais, dans plusieurs jeux, Lloyd Shapley a montré que le problème a au moins une solution stable qui est l'équilibre de Nash. L'exemple le plus connu est le problème des mariages stables. Il consiste à trouver, étant donné un certain nombre d'hommes et autant de femmes, une façon stable de former des couples sans que personne n'y trouve rien à redire (sans qu'aucune femme ni qu'aucun homme préfère être avec un autre partenaire).

Non seulement Shapley a montré l'existence de plusieurs solutions stables à ce problème mais, avec son collègue David Gale, il a donné une solution algorithmique, c'est-à-dire une manière de calculer ces solutions.

Le problème des mariages stables est une version simplifiée des problèmes d'appariement optimal, où l'on cherche à affecter des étudiants dans des établissements à effectifs limités en tenant compte des préférences de tous (la procédure automatisée d'entrée au collège Affelnet, la procédure d'admission postbac, etc.). Des problèmes dont les solutions stables peuvent se calculer par l'algorithme de Shapley.

De manière générale, l'optimisation issue de la théorie des jeux est au cœur des

préoccupations de notre monde numérique. Pour le routage des réseaux sans fil, par exemple, le problème consiste à faire voyager le plus vite possible des paquets de données d'un point à un autre en passant par de multiples relais intermédiaires. « Pour résoudre ces problèmes, on tire au hasard un chemin par lequel on fait passer un paquet de données. Puis on répète l'opération. En mesurant les

performances de chaque paquet, on va apprendre progressivement les bons chemins pour choisir au final le chemin optimal », explique Corinne Touati, spécialiste de la théorie des jeux au Laboratoire d'informatique de Grenoble. ■

Philippe Pajot

Le Monde daté du 07.05.2013

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article traite de la théorie des jeux et de son lien avec les calculs de probabilités.

Cet intérêt pour les calculs de probabilités dans les différents jeux a permis de développer au Moyen Âge cette nouvelle branche des mathématiques.

Ces calculs permettaient d'anticiper les probabilités de gagner à un jeu ou les gains potentiels pour une mise de départ donnée.

Magie des nombres ou nombres en folie

« **O**ui, la réponse à l'Univers est vraiment 42 », titrait le quotidien britannique *The Independent* sur toute la largeur de sa « une », vendredi 8 novembre. Suivait un article pour expliquer que des astronomes de Cambridge ayant entrepris de calculer la constante de Hubble étaient tombés sur 42. La constante de Hubble, paramètre cosmologique duquel on peut déduire l'âge de l'Univers, devrait se situer entre 20 et 80, selon les théoriciens. Et 42 est le chiffre présenté comme la réponse ultime à « la vie, l'Univers et le Grand Tout » par le romancier Douglas Adams, auteur du *Guide de l'auto-stoppeur galactique*, paru il y a vingt ans. Le rédacteur scientifique de *The Independent*, Charles Arthur,

s'amusait de cette coïncidence qui a inspiré à son confrère Robert Matthews, du *Sunday Telegraph*, le billet d'humeur suivant : « Une histoire stupide a circulé la semaine dernière. Des scientifiques avaient fini par prouver que la réponse de la vie, de l'Univers et du Grand Tout résidait dans le chiffre 42, le même que celui trouvé par Douglas Adams, l'auteur du *Guide de l'auto-stoppeur galactique* ! »

Ce chiffre, c'est la constante de Hubble, qui mesure le taux d'expansion de l'Univers. Malheureusement, il n'a aucune signification en soi. Si les unités compliquées auxquelles les astronomes se réfèrent pour mesurer ce paramètre aboutissent à 42, c'est par pure coïncidence. La raison en est que la constante

de Hubble n'est pas vraiment un nombre, comme six ou pi. En effet, elle est liée à une période de temps, et peut donc être mesurée indifféremment en secondes, jours ou même en unités zog-martiennes, ce qui donne à chaque fois un résultat différent.

Cela dit, les scientifiques font grand cas des nombres purs tels que pi, qui bourgeonnent çà et là dans leurs théories, parce qu'ils sont réellement universels et conservent la même valeur pour quiconque les mesure. Les savants pensent que cette propriété est liée à un profond mystère cosmique et résumée par la question suivante : « Pourquoi les mathématiques marchent ? »

Jour après jour, les mathématiciens noircissent leurs cahiers de hiéroglyphes.

Découvrent-ils vraiment la réalité en jonglant avec ces symboles mathématiques ? S'agit-il d'un pur amusement ou simplement d'une invention de la réalité ? L'un des meilleurs arguments prouvant que les mathématiques ne sont pas déconnectées du réel est la façon pour le moins étrange dont certains nombres magiques ne cessent de surgir là où on ne les attend pas.

Le nombre pi évoque les formules scolaires sur la circonférence du cercle et l'aire du disque. Ce que l'on sait moins, c'est que ce nombre célèbre entre tous apparaît régulièrement dans des situations où la précision mathématique ne paraît pas de mise. Si l'on mesure par exemple le quotient intellectuel d'un grand nombre de personnes,

les résultats permettront de distinguer quelques crétins, quelques génies, avec le reste du troupeau quelque part entre les deux. Rien de bien passionnant, sauf à répartir ces résultats sur un graphe distribuant la population en fonction du QI. On obtient alors une belle courbe en cloche. Or il apparaît que tout trait humain donnera une courbe similaire, dépendant largement de la valeur de π . Autre exemple : l'aiguille. Laissez-la tomber. La probabilité qu'elle se glisse dans une rainure, entre deux lames de parquet, dépend aussi de π . Pour le prouver, il suffit de s'armer de patience et de refaire l'expérience quelques centaines de fois pour en déduire la valeur de ce nombre à quelques pour cent près ! De même, il existe un théorème sur la probabilité qu'ont deux nombres pris au hasard de ne pas avoir de facteur commun. Le résultat, vous l'avez deviné, dépend de π et même de son

carré. Dans un article publié l'an dernier par la revue *Nature*, j'ai fait appel à ce théorème pour déduire une valeur de π à partir de l'éparpillement des étoiles dans le ciel. Et j'ai trouvé 3,12272, soit la bonne valeur à 99,94 pour cent près. Pour la constante mathématique « e », approximativement égale à 2,718, c'est pareil. Cet autre nombre « magique » surgit dans de drôles d'endroits. D'ordinaire, il est associé à des phénomènes de croissance exponentielle, comme l'étude des populations ou l'analyse des prix de détail. Mais il se cache aussi derrière certains événements aléatoires. Pendant la Seconde Guerre mondiale, les Allemands ont délibérément bombardé Londres avec des V-2. La probabilité qu'un quartier précis de Londres fût touché était faible. Pourtant, si de nombreuses zones furent épargnées, d'autres furent au contraire bombardées plusieurs fois. Or, la théorie de

la probabilité démontre clairement que la distribution des points de chute des V-2 est liée à ce fameux nombre « e », dont on peut ainsi déduire la valeur à moins d'un pour cent près. De là à penser que lorsqu'un certain ordre mathématique apparaît dans des événements

aléatoires il devient difficile de ne pas suivre les pythagoriciens, pour qui le nombre était racine de toute chose, il n'y a qu'un pas. ■

Robert Matthews
Sunday Telegraph
(14 novembre 1996)

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne **des probabilités qui dépendent, de façon surprenante, des constantes mathématiques π ou e** :

La distribution de la population en fonction du QI a la forme de la courbe de Gauss dont la définition est $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$, qui dépend de π ;

L'expérience de l'aiguille est appelée « aiguille de Buffon » et la probabilité recherchée dépend de π , de la largeur l des lames du parquet et de la longueur a de l'aiguille car elle est égale à $\frac{2a}{\pi l}$.

La probabilité que deux nombres pris au hasard n'aient pas de facteur commun (c'est-à-dire qu'ils soient premiers entre eux) est de $\frac{\pi^2}{6}$;

La distribution de points de chute dépend du nombre e .

MOTS CLÉS

FONCTION DE DENSITÉ (CAS GÉNÉRAL)

f est une fonction de densité sur l'intervalle $[a ; b]$ ($a < b$), si :

- f est continue sur $[a ; b]$;
- f est positive sur $[a ; b]$;
- $\int_a^b f(x) dx = 1$.

La variable aléatoire X suit la loi à densité (ou loi continue) de fonction de densité f , si

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

ESPÉRANCE (CAS GÉNÉRAL)

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a ; b]$. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \int_a^b xf(x) dx$.

FONCTION DE DENSITÉ (LOI UNIFORME)

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$), lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a ; b]$ et $f(x) = 0$ en dehors de $[a ; b]$.

ESPÉRANCE (LOI UNIFORME)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a ; b]$. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

FONCTION DE DENSITÉ (LOI EXPONENTIELLE)

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur $\mathbb{R}$, lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

ESPÉRANCE (LOI EXPONENTIELLE)

Soit X la variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

FONCTION DE DENSITÉ DE $N(0 ; 1)$

Une variable aléatoire de densité f suit la loi normale centrée réduite, notée $N(0 ; 1)$, lorsque

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Lois à densité

Après avoir étudié dans le précédent chapitre les probabilités sur des cas discrets (des nombres particuliers), on va ici les considérer sur un intervalle (toutes les valeurs possibles entre deux nombres).

On verra ainsi comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, mais aussi comment calculer ses paramètres : espérance, variance et écart type.

Qu'est-ce qu'une loi à densité sur un intervalle ?

La fonction f est une fonction de densité sur l'intervalle $[a ; b]$ ($a < b$), si :

- la fonction f est continue sur $[a ; b]$;
- la fonction f est positive sur $[a ; b]$;

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

La variable aléatoire X suit la loi à densité (ou loi continue) de fonction de densité f , si $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Remarque : $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$.

Qu'est-ce que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire de densité ?

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a ; b]$. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \int_a^b xf(x) dx$.

Loi uniforme

Définition : une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$), lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur l'intervalle $[a ; b]$, avec $f(x) = 0$ en dehors de l'intervalle $[a ; b]$.

La représentation graphique d'une fonction f ainsi définie est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Espérance de la loi uniforme : si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a ; b]$, alors

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Propriété : si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$), pour tout intervalle $[c ; d] \subset [a ; b]$, on a : $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$.

Loi exponentielle

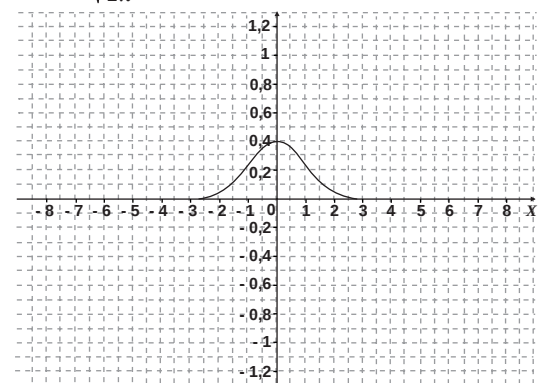
Définition : une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur l'ensemble des réels, lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $\{X \leq t\}$ est donnée par $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Espérance de la loi exponentielle : si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Loi normale centrée réduite

Définition : une variable aléatoire de densité f suit la loi normale centrée réduite, notée $N(0 ; 1)$, lorsque

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ sur } \mathbb{R}.$$



Représentation graphique de f

Espérance, variance et écart type de la loi $N(0 ; 1)$:

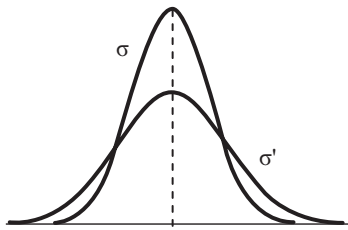
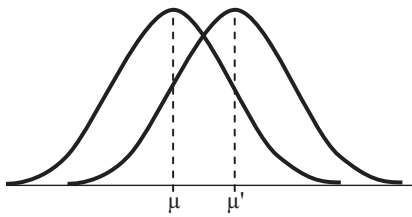
si X suit la loi $N(0 ; 1)$, on a $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

L'écart type est $\sqrt{V(X)} = 1$.

Valeurs remarquables : $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$;

$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$.

Loi normale de paramètres μ et σ^2 :
 $N(\mu ; \sigma^2)$



Définition : une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$ lorsque $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0 ; 1)$.

Influence des paramètres : la courbe est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$, qui caractérise donc la tendance centrale. Quant à σ , il caractérise la dispersion de la distribution. Plus il est grand, plus la distribution est « étalée » de part et d'autre de μ . Les abscisses des points d'inflexion sont égales à $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.

Espérance, variance et écart type : si X suit la loi $N(\mu ; \sigma^2)$, on a $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

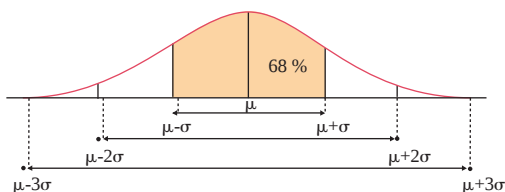
L'écart type est $\sqrt{V(X)} = \sigma$.

Les intervalles un, deux, trois sigmas :

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ au centième près.

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ au centième près.

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ au millièmè près.



Exemples de calcul de probabilités à la calculatrice dans le cadre de la loi normale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(100 ; 5^2)$.

■ On calcule $P(93 \leq X \leq 103) \approx 0,64$ au centième près en utilisant les méthodes suivantes.

Avec une CASIO

Dans les menus « STAT », puis « DIST », puis « NORM », puis « ncd », entrer :

Normal	C.D.
Lower	: 93
Upper	: 103
σ	: 5
μ	: 100

Avec une T.I.

En utilisant le menu « DISTR », entrer :

normalcdf(93,103,	
100,5)	
	0.644991

■ On cherche la valeur de x tel que $P(X \leq x) = 0,7$ en utilisant les méthodes suivantes.

Avec une CASIO

Dans les menus « STAT », puis « DIST », puis « NORM », puis « InvN », entrer :

Inverse Normal	
Trail	: Left
Area	: 103
σ	: 5
μ	: 100

$x \approx 102,6$ au dixième près.

Avec une T.I.

En utilisant le menu « DISTR », entrer :

invNorm(0,7,100,	
5)	
	102.622

DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

• Une notion dont l'importance s'affirme sans cesse : la fiabilité p. 54-55
(Le Monde daté du 10.02.1964)

• Finance, maths et humanités p. 55
(Christian Walter, Le Monde daté du 19.09.2008)

MOTS CLÉS

ESPÉRANCE DE $N(0 ; 1)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0 ; 1)$, $E(X) = 0$.

VARIANCE DE $N(0 ; 1)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0 ; 1)$, $V(X) = 1$.

ÉCART TYPE DE $N(0 ; 1)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0 ; 1)$, l'écart type de X est $\sqrt{V(X)} = 1$.

$U_{0,05}$

$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$

$U_{0,01}$

$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$

LOI NORMALE $N(\mu ; \sigma^2)$

La variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$, lorsque la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0 ; 1)$.

ESPÉRANCE DE $N(\mu ; \sigma^2)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu ; \sigma^2)$, $E(X) = \mu$.

VARIANCE DE $N(\mu ; \sigma^2)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu ; \sigma^2)$, $V(X) = \sigma^2$.

ÉCART TYPE DE $N(\mu ; \sigma^2)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu ; \sigma^2)$, l'écart type de X est $\sqrt{V(X)} = \sigma$.

INTERVALLES σ , 2σ ET 3σ

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$

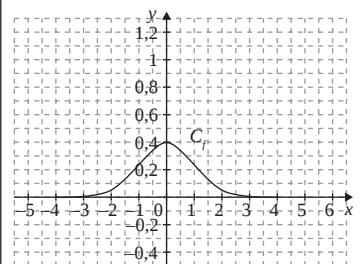
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

ZOOM SUR...

LA LOI $N(0 ; 1)$

La fonction de densité f d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite $N(0 ; 1)$ est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ sur } \mathbb{R}.$$



■ f est continue.

■ f est paire.

EXERCICES PAS À PAS

Liban (mai 2013)

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18.

On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2 .
(Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.)

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1 . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2 .

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale.

On considère les événements :

■ E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 . » ;

■ C : « Le petit pot est conforme. ».

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1 . »
3. Déterminer la probabilité de l'événement C .
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart type $\sigma_1 = 0,006$.

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart type σ_2 .

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

Soit Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b) Déterminer, en fonction de σ_2 , l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16 ; 0,18]$.

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2 .

On pourra utiliser le tableau donné ci-contre, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1.

La bonne méthode

Partie A

1. Traduire les données de l'exercice en probabilités et les placer dans l'arbre en commençant par le choix de la chaîne de fabrication.
2. Appliquer la formule des probabilités conditionnelles.
3. Appliquer la formule des probabilités totales en trouvant une partition de C .
4. Traduire la probabilité recherchée à l'aide des événements préalablement définis puis appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

Partie B

1. Traduire la probabilité recherchée à l'aide de la variable aléatoire définie, puis utiliser le tableau donné.
2. a) Appliquer le cours sur la loi normale.
b) Déduire l'encadrement recherché à partir de l'encadrement donné.
c) Chercher dans le tableau la valeur de β qui correspond à une probabilité de 0,99. Puis résoudre une équation pour obtenir σ_2 .

Sujet inédit

Une fabrique de desserts dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des pots de crème glacée.

La masse en grammes de crème glacée contenue dans chacun des pots peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 100 d'écart type 0,43.

Afin de contrôler le remplissage des pots, le responsable qualité souhaite disposer de certaines probabilités.

Le tableau ci-dessous présente le calcul, effectué à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques événements pour une loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,43.

a	$p(X \leq a)$
98	0,00000165
98,5	0,00024299
99	0,01002045
99,5	0,12245722
100	0,50000000
100,5	0,87754278
101	0,98997955
101,5	0,99975701
102	0,99999835

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

Pour les calculs de probabilités, on utilisera éventuellement le tableau précédent ou la calculatrice.

1. a) Déterminer la probabilité de l'événement « $X > 99$ ».
- b) Déterminer la probabilité de l'événement « $99 \leq X \leq 101$ ».

- c) Le pot est jugé conforme lorsque la masse de crème glacée est comprise entre 99 grammes et 101 grammes.
Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé aléatoirement soit non conforme.

2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pots conformes dans la production est 98 %.

- a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pots conformes sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 120.

- b) On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 120 pots de manière aléatoire. Au cours d'un de ces contrôles, un technicien compte 113 pots conformes. En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, prendra-t-on la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?

La bonne méthode

1. a) Il faut penser à utiliser l'événement complémentaire.
- b) Pour tout a et b réels tels que $a < b$,
 $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.
- c) Il faut utiliser la question 1. b).
2. a) Il faut remplacer p et n par leurs valeurs dans l'expression de I .
- b) Il faut déterminer si 113 appartient ou non à l'intervalle trouvé à la question 2. a).

Sujet inédit

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique) en grande quantité. On s'intéresse à la masse d'un sachet.

La variable aléatoire qui, à chaque sachet, associe sa masse en grammes est notée Y .

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 8.

1. Calculer $P(Y \geq 104)$.
2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle $[104 ; 136]$ est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

La bonne méthode

1. Il faut se ramener à la loi normale centrée réduite.
2. Pour tout a réel, $P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1$.

Une notion dont l'importance s'affirme sans cesse : la fiabilité

La notion de sûreté et de durée de fonctionnement d'un matériel est ancienne, mais elle n'a reçu une appellation précise – la fiabilité – et n'est mesurée que depuis peu. Cependant son importance est déterminante en électronique : on calcule par exemple que la somme des servomécanismes d'un engin spatial n'a actuellement que 22 % de chances de fonctionner dix jours de suite sans défaillance, et on ne ménage aucun effort pour accroître la sûreté d'emploi des multiples dispositifs électroniques logés dans les fusées. On a donc pu écrire qu'avec les systèmes électroniques de plus en plus complexes dont la structure comporte un nombre croissant de composants... « une civilisation sera sauvée si la fiabilité de ses défenses est meilleure que celle de ses adversaires ».

En fait, la notion de fiabilité date de la dernière guerre, lorsque des méthodes de contrôle statistique de qualité furent mises en œuvre. C'est que sous la poussée technique, la « population » des composants présents dans les systèmes et susceptibles de défaillance s'était mise à croître rapidement. On constatait, par exemple, qu'à un instant donné trois systèmes sur quatre n'étaient pas en état de marche, ou bien que le coût de maintenance des matériels électroniques d'aéronautique s'élevait à dix fois leur prix d'achat. À l'élargissement du nombre de fonctions accomplies par ces matériels correspondait un élargissement de leurs conditions de fonctionnement. La diffusion de l'électronique entre des mains peu ou non préparées entraînait, d'autre part, une exigence supplémentaire. Ces grandes masses de matériel offrent un champ d'observation statistique auquel l'électronique ne pouvait pas prétendre naguère. Dans de grandes exploitations comme les PTT le « brassage » des matériels rend le parc de matériels observés assez homogène, c'est-à-dire que l'âge d'un matériel donné s'écarte peu de l'âge moyen du parc total. Dès lors, le relevé des fréquences de défaillances peut prendre tout son sens statistique. Cet aspect de continuité est important : un matériel est en effet réputé défaillant, qu'il soit victime d'une franche défaillance ou qu'il « dérive » progressivement en dehors de ses caractéristiques opérationnelles normales. L'examen du comportement d'une « population » – au sens statistique du terme – de composants conduit

tout naturellement à la mise au point d'un modèle mathématique, c'est-à-dire d'une série de relations bien représentatives des phénomènes observés.

Trois notions essentielles

- Supposons une « population » homogène de composants placés, chacun et indépendamment, dans leurs conditions de fonctionnement normales. Observons la *fréquence des défaillances* – c'est-à-dire le nombre de défaillances dans l'unité de temps, soit une heure, et l'évolution de cette fréquence dans le temps. La courbe de cette évolution sera par exemple *une exponentielle décroissante* ; elle indique que le rapport du nombre des défaillances survenant pendant une heure au nombre de défaillances survenant pendant l'heure suivante est constant et indépendant de l'heure considérée. Ainsi, la durée de vie d'un élément à partir d'un instant quelconque auquel il est encore en vie est indépendante de son histoire antérieure et en particulier, indépendante du fait que l'origine de l'expérience est récente ou, au contraire, déjà ancienne : l'élément *ne vieillit pas*.

- Outre cette courbe constatant la répartition des fréquences de défaillances dans le temps, on peut présenter le nombre total des défaillances qui se sont produites depuis l'origine. Cette courbe, qui est la *courbe de probabilité de défaillance*, tend vers une asymptote qui, de valeur unité, correspond naturellement à la *certitude* : au temps infini, tous les composants sans exception auront connu une défaillance. Il suffit de soustraire de l'unité cette courbe

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne l'utilisation de la loi normale pour étudier la volatilité d'un cours de bourse.

Ici, il s'agit de la loi $N(0 ; \sigma^2)$ avec $\sigma = 6$.

On retrouve la formule du cours :

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-6 \leq X \leq 6) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-12 \leq X \leq 12) \approx 0,95$$

de probabilité de défaillance pour obtenir une courbe de probabilité de non-défaillance. Cette probabilité de non-défaillance – qui définit bien la fiabilité, – cesse d'être égale à 1 (certitude de fonctionnement) dès le début de l'expérience.

- Enfin, dernière et importante notion : le *taux de défaillance*, qui diffère essentiellement de la fréquence : c'est le rapport entre la fréquence des défaillances et la fiabilité. Avec la loi exponentielle, le taux de défaillance est constant : il est en effet normal, sinon évident, que la fiabilité diminuant dans le même temps que diminue le nombre des défaillances, le rapport de ces deux paramètres reste constant. Quant à son inverse, c'est la *durée de vie moyenne du composant* à partir d'un instant quelconque.

On peut la mesurer en notant expérimentalement l'intervalle de temps entre les défaillances des composants. L'*intervalle moyen entre défaillances* (IMED) est naturellement la moyenne des valeurs relevées sur tout le lot de matériel étudié.

Depuis longtemps déjà l'administration des PTT et le Centre national d'études des télécommunications, en raison des conditions particulières

d'exploitation des réseaux téléphoniques, avaient pris conscience de la nécessité d'étudier la fiabilité des tubes et des composants. Le groupe de travail « composants électroniques » (B2) de la commission permanente de l'électronique du Plan a fait sienne cette préoccupation et l'a fait inscrire en 1961 au programme des recherches prioritaires recommandées au gouvernement, sous la forme d'une « action concertée électronique ». Cette action a été décidée en 1962 et confiée à la délégation générale à la recherche scientifique et technique, au sein de laquelle a été créé cette fin un comité de l'électronique. Une partie des fonds mise à la disposition de ce comité est consacrée à des conventions de recherche sur la fiabilité passées à des laboratoires de l'Université, des administrations et de l'Industrie.

Le but poursuivi, d'une manière générale, est d'« injecter l'esprit fiabilité » et de développer les études consacrées au comportement des composants.

Pour aider à la création de moyens de mesure spécialisés chez les fabricants de composants, quatre premiers contrats d'étude leur ont été passés. Ils portent sur l'étude de l'influence

des états de surface sur la détérioration des transistors ; l'étude expérimentale de la fiabilité d'un transistor par alliage, une étude générale des paramètres physiques affectés par les différents processus de vieillissement et, enfin, l'influence des conditions de fabrication des ferrites sur leur vieillissement.

Le choix de ces thèmes obéit à un souci d'éviter toute dispersion et d'entreprendre, d'entrée de jeu, l'étude des phénomènes de base qui sont à l'origine des défauts. En effet, ou bien la connaissance de ces phénomènes permet d'en atténuer les effets dans le comportement des composants en modifiant les conditions de leur

fabrication, ou bien, s'il n'est pas possible d'agir sur ces conditions de fabrication, les connaissances acquises permettront quand même d'améliorer le composant à terme, car on pourra établir les lois d'accélération des phénomènes avec les contraintes et, par suite, mettre au point des essais accélérés pour la mesure de la fiabilité.

De plus il existe déjà un centre de fiabilité, né d'une convention passée entre le CNET et la délégation générale à la recherche scientifique. Ce centre s'est proposé des séries de travaux, étroitement dépendants d'ailleurs. ■

Le Monde daté du 10.02.1964

Finance, maths et humanités

Le problème des financiers n'est pas l'excès de modélisation mathématique mais sa nature même.

Dans la célèbre bande dessinée de Jodorowsky et Moebius, *L'Incal noir*, un palais présidentiel volant flotte, telle une île aérienne, à quelques kilomètres au-dessus de la surface terrestre. A son bord, une secte de scientifiques se livre à des expériences nouvelles qui fascinent la cour. Une république des savants de science-fiction, sorte de version contemporaine de l'île de Laputa, création née de l'imagination de Jonathan Swift dans *Les Voyages de Gulliver* : des astronomes qui se retrouvent entre eux à l'abri des contingences matérielles du reste du monde, travaillent à décrire les mécanismes célestes. Il existe un point commun entre les deux récits : le monde d'en bas peut subir durement les décisions prises au sein de l'île d'en haut, et les révoltes sont matées par un mouvement descendant de l'île volante.

Aujourd'hui, moderne île de Laputa, les techniques de la finance mathématique s'imposent sans débat public à la société qui en subit les effets de manière parfois violente. Il est donc temps d'aller examiner les contenus des modèles des astronomes de Laputa.

C'est en effet un fait avéré et désormais assez connu que la pratique de la modélisation mathématique en finance a profondément modifié le paysage de la profession financière dans le monde et a contribué à l'omniprésence de la finance dans la société. Dans tous les domaines, les modèles sont apparus comme des outils de plus en plus indispensables à la pratique quotidienne des activités professionnelles financières les plus diverses : les modèles mathématiques se trouvent aujourd'hui au cœur de la finance moderne, à la fois comme outils

pour tous ceux qui interviennent sur les marchés, mais aussi comme concepts performatifs de la réalité financière elle-même.

Les marchés sont ainsi mathématiquement construits et l'impact social de l'utilisation des modèles mathématiques employés par les professionnels devient de plus en plus prégnant. On peut dire que la finance professionnelle contemporaine est encadrée dans la théorie financière mathématisée, selon la terminologie utilisée par le sociologue Bruno Latour et le chercheur Michel Callon pour la science économique. De plus, cet encastrement est aussi cognitif, dans le sens où le langage scientifique pénètre les corpus réglementaires comme les normes comptables internationales ou les réglementations de Bâle II et de Bruxelles sur la solvabilité des établissements de crédit.

On voit ainsi qu'un élément important pour comprendre les crises financières récentes est la nature des modèles mathématiques : la manière selon laquelle les mathématiques de la finance prennent forme dans (et préforment) la réalité sociale. Si les modèles mathématiques sont inadéquats, alors on peut craindre que les corps de normes soient en fait pathogènes, et accentuent les risques financiers bien plus qu'ils ne les encadrent. La question n'est donc pas tant « *trop de maths dans la finance* » que « *quelles maths passent dans la finance* ».

Considérons, par exemple, les débats actuels sur la notion de valeur fondamentale des entreprises que l'on utilise comme référence par rapport à ce qui est qualifié d'exagération boursière. Ces débats s'articulent sur une

opposition entre la finance perçue comme excessive ou anormale et l'économie comprise comme réelle et normale. Ils conduisent de plus à un dédoublement du regard sur les marchés, scindant les cours de Bourse en deux composantes, l'une dite « *partie fondamentale* » du cours, l'autre dite sa « *partie spéculative* ». Toute appréciation de l'activité financière se trouve donc aujourd'hui comme décomposée en deux parties et les débats publics semblent bloqués dans l'impasse d'une opposition indépassable entre partisans et adversaires du marché. Or, on montre que cette division conceptuelle repose sur la moyenisation artificielle des variables économiques et financières, transposant l'ancienne théorie des moyennes d'Adolphe Quételet (1835) qui s'appuyait sur la loi normale de Laplace (1809). On croit être moderne alors qu'il ne s'agit que d'une vue datée du XIX^e siècle, totalement inadaptée pour la caractérisation pertinente des aléas de l'économie moderne : il s'agissait à cette époque de construire les cadres sociaux de la régularité des phénomènes économiques et financiers, et par voie de conséquence la facilitation de leurs calculs.

Mais l'incertitude de l'économie « réelle » rend caduque cette ancienne construction sociale. En réalité, le clivage conceptuel actuel et les impasses auxquelles il conduit relèvent davantage d'une mauvaise quantification de l'incertitude que d'une analyse effective des situations économiques. On voit donc comment une enquête critique sur le calcul de la valeur fondamentale en finance, effectuée au moyen d'une double approche historique et épistémologique, peut permettre d'organiser plus adéquatement le débat intellectuel et donc alimenter plus efficacement les débats publics. Dans ce cas, c'est moins un excès de mathématiques qu'un défaut de modélisation qui se trouve à l'origine du problème posé.

Les débats actuels sur la place prépondérante et le rôle majeur de la finance dans la société, sur la financiarisation du monde et l'extension des marchés de capitaux dans l'économie mondiale, montrent que cette notion d'humanités scientifiques en finance est devenue d'une totale actualité. ■

Christian Walter

Le Monde daté du 19.09.2008

POURQUOI CET ARTICLE ?

Les lois probabilistes et statistiques sont à l'origine de modèles qui permettent d'agir sur des situations concrètes. Cet article met en évidence la construction mathématique des marchés et montre que les professionnels de la finance utilisent des modèles

mathématiques. D'un point de vue historique, il est à noter que certaines modélisations économiques se sont construites à partir de la loi normale de Laplace (1809), énoncée dans le chapitre « Lois à densité ».

MOTS CLÉS

ÉCHANTILLON

En statistique, la population est l'ensemble sur lequel on étudie une série statistique. Un échantillon est une partie (un sous-ensemble) de la population.

FRÉQUENCE

En statistique, la fréquence d'une valeur est le quotient :

$$\frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{taille de la population}}$$

On l'exprime sous la forme d'un pourcentage ou d'un nombre décimal.

SIMULATION

- Simuler une expérience aléatoire consiste à produire une liste de n résultats (à l'aide de la touche RANDOM de la calculatrice par exemple) que l'on peut assimiler (ou faire correspondre) à n résultats de l'expérience. On a ainsi produit un échantillon de taille n de l'expérience.
- Entre deux simulations, ou entre deux échantillons, les distributions de fréquences varient, c'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.

INTERVALLE DE FLUCTUATION

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n; p)$ avec $0 < p < 1$, $n \geq 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$, on appelle intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

INTERVALLE DE CONFIANCE

- Si f est la fréquence obtenue avec un échantillon de taille n , un intervalle de confiance à un niveau de confiance de 0,95 est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

- Pour un échantillon de taille n , l'amplitude de cet intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Échantillonnage

La presse présente très régulièrement des sondages accompagnés de pourcentages et de commentaires. Ces sondages sont-ils fiables ? Quelles notions sous-tendent-ils ?

Qu'est-ce qu'un intervalle de confiance, quel lien avec la fluctuation ?

Prenons le cas d'une population dont on veut connaître les intentions de vote, avant une élection. Il est de fait malaisé d'interroger l'ensemble des personnes concernées. On constitue alors un échantillon représentatif (le mot « représentatif » signifie que l'on va respecter les répartitions définies dans la population, comme, par exemple, le pourcentage d'hommes et de femmes, les tranches d'âge, etc.). On va ensuite étendre les résultats obtenus à partir de l'échantillon à toute la population.

L'expérience montre que, lorsque l'on choisit un autre échantillon représentatif, on obtient des résultats assez proches mais pas exactement les mêmes. Aussi, pour avoir une meilleure approximation du résultat, va-t-on donner un intervalle plutôt qu'un nombre. Si on reprend l'exemple de l'élection, supposons qu'à partir du sondage réalisé sur l'échantillon, un candidat obtienne 45 % des intentions de vote. À partir de ce résultat, dans quel intervalle se situent les intentions de vote de la population ?

Cet intervalle s'appelle « intervalle de confiance », afin de limiter les effets de la fluctuation d'échantillonnage.

Que signifie le terme « au seuil de 95 % de la fréquence » ?

Le pourcentage de 95 % détermine la marge d'erreur. Ici, le risque est de 5 %. La phrase « au seuil de 95 % en fréquence » signifie donc « avec une marge d'erreur inférieure à 5 % ». Le seuil de 5 % est le plus utilisé, mais on peut très bien définir un autre seuil.

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$ avec $0 < p < 1$, $n \geq 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

On appelle **intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence** l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Contrairement à la fréquence f de l'intervalle de confiance, la proportion p est ici déjà connue.

On utilise la **loi binomiale** $B(n; p)$ car on renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Intervalle de confiance

Il s'agit de savoir comment estimer la proportion p d'individus d'une population ayant une propriété, à partir de la fréquence f observée sur un échantillon : on utilise un intervalle de confiance.

Définition : en utilisant les notations du point précédent, on appelle **intervalle de confiance de la proportion p avec un niveau de confiance de 95 %**,

l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ où n est la taille de l'échantillon.

Méthode : on considère une population et un échantillon de taille n de cette population. À partir de l'échantillon, on calcule la fréquence f des individus ayant une propriété. La proportion p des individus de la population ayant la propriété appartient à l'intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %, qui est : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- Avec la méthode française, la marge d'erreur ne peut pas être calculée mathématiquement **p. 58**

(Pierre Le Hir, *Le Monde* daté du 17.03.2002)

Amérique du Nord (mai 2013)

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes.

Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.

Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable ; un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart type $\sigma = 11$. Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

(Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.)



Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5

x	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ .
Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? (On arrondira le résultat au dixième.)
On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1., peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

La bonne méthode

Partie A

1. Utiliser le tableau et le fait que si X est une variable aléatoire suivant une loi continue :
$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a).$$
2. Traduire à l'aide d'une variable aléatoire et d'une probabilité le fait qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Traduire l'énoncé à l'aide d'une variable aléatoire et d'une probabilité, puis centrer et réduire. Utiliser la valeur donnée dans l'énoncé.

Partie B

1. Utiliser les données de l'énoncé pour déterminer les bornes de l'intervalle de fluctuation.
2. Calculer la fréquence observable de l'échantillon et vérifier si elle appartient ou non à l'intervalle de fluctuation précédemment déterminé.

Avec la méthode française, la marge d'erreur ne peut pas être calculée mathématiquement

Au deuxième tour de l'élection présidentielle, 2 % à 3 % sépareront Lionel Jospin et Jacques Chirac, selon les derniers sondages. Devant un score aussi serré, la prudence est de rigueur, car l'écart entre les deux candidats est inférieur aux marges d'erreur inhérentes à ces estimations. Des marges qui ne sont au demeurant que putatives, aucune méthode ne permettant de les calculer de façon scientifique.

Les étudiants en statistiques connaissent pourtant bien la loi de Gauss, dite loi normale, illustrée par une courbe en cloche : celle-ci représente la manière dont se distribue de façon symétrique, autour d'une moyenne, une grandeur dont les variations sont régies par un très grand nombre de facteurs indépendants. Cette loi s'applique parfaitement aux sondages réalisés selon la méthode aléatoire en vigueur aux États-Unis notamment : avec ce système, les personnes interrogées sont choisies par tirage au sort. Les tables de Gauss établissent alors que pour un échantillon de 1 000 sondés, la marge d'erreur, appelée « intervalle de confiance », est au maximum de 3,2 %, dans un sens ou dans l'autre. Elle est d'autant plus élevée que le résultat est proche de 50 % – ce qui est le cas pour le duel annoncé Chirac-Jospin – et que l'échantillon est plus réduit. Avec un panel de 500 sondés seulement, elle peut atteindre 4,5 %, en plus ou en moins.

En France, la méthode de sondage aléatoire n'est quasiment pas utilisée. Pour les enquêtes d'opinion,

les instituts ont recours à la technique des quotas pour constituer un échantillon, généralement de 1 000 personnes, représentatif de la composition (sexe, âge, catégorie socioprofessionnelle, type de commune, région...) de la population. Or « avec la méthode des quotas, il n'existe pas de loi mathématique permettant de déterminer la marge d'erreur d'un sondage », explique Jean-François Doridot, directeur du département opinion d'Ipsos. En pratique, toutefois, « on considère que la marge d'erreur des sondages par quotas est égale, voire inférieure à celle des sondages aléatoires ». Les instituts extrapolent donc, sans pouvoir les vérifier, les valeurs données par la loi de Gauss. Encore faut-il que l'échantillon constitué par le système des quotas reflète fidèlement les caractéristiques de l'ensemble de la population. Depuis quelques semaines, les instituts disposent de toutes les données du recensement de 1999, ce qui leur permet d'affiner leur procédure. Mais, en théorie, des biais sont toujours possibles : la difficulté d'accès à certains quartiers, éloignés ou « sensibles », peut conduire les enquêteurs à les laisser de côté ; de même, des professions aux horaires atypiques risquent d'être négligées. Pour éviter ces travers, la plupart des sondages sont aujourd'hui réalisés, en France, par téléphone. Ce qui « permet d'assurer une plus grande dispersion géographique de l'échantillon », souligne Ipsos, en même temps que de « réduire les risques de "bidonnage" », le travail des enquêteurs étant plus facile à contrôler.

Reste encore le problème des biais affectant, non pas l'échantillon, mais les réponses des sondés. Il est ainsi établi que les abstentionnistes répugnent souvent à avouer qu'ils n'ont pas l'intention de voter. Les instituts peuvent alors utiliser des « filtres » et ne retenir que les opinions des électeurs « tout à fait certains » d'aller voter. Il est bien connu aussi que les personnes ayant un niveau d'études élevé répondent plus volontiers que les autres aux sondages, ou que les sympathisants des partis extrêmes hésitent à afficher leurs opinions. D'où les

« redressements » effectués à partir de la reconstitution des votes antérieurs. « Le problème, indique Jean-François Doridot, est que les gens oublient souvent leurs votes passés et les reconstituent en fonction de leurs choix présents. » Près de 15 % des sondés affirment aujourd'hui, en toute bonne foi, avoir apporté aux élections législatives de 1997 leurs suffrages à des candidats écologistes, alors que ceux-ci avaient totalisé un score bien inférieur. ■

Pierre Le Hir

Le Monde daté du 17.03.2002

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article traite des sondages et de leurs marges d'erreur.

Les marges d'erreur sont calculées à l'aide de l'intervalle de confiance : on teste la fréquence des votes pour un candidat sur un échantillon et on peut ensuite donner un encadrement de cette fréquence dans les autres échantillons (à un niveau de confiance de 95 %) à l'aide de cet intervalle.

Par exemple, ici lorsque $n = 1\,000$, si la fréquence de vote pour un candidat est f sur un échantillon, l'intervalle de confiance sera $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. La marge d'erreur sera donc de $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1\,000}} \approx 0,032 \approx 3,2\%$ (dans un sens ou dans l'autre).

Si l'échantillon est de taille $n = 500$, la marge d'erreur sera donc de $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,045 \approx 4,5\%$.

L'article précise que les sondages n'utilisent plus des échantillons choisis strictement au hasard comme en mathématiques, mais la méthode des quotas où l'échantillon est représentatif de la composition de la population.

La marge d'erreur des sondages utilisant la méthode des quotas est supposée être plus fiable que celle utilisant les sondages aléatoires, ils sont donc censés être plus précis.

ALGORITHMIQUE/ LOGIQUE

 n $\in$ x^2 Σ

EXEMPLES

BOUCLE « TANT QUE »

Entrées

Saisir a (réel strictement positif)
Saisir q (réel strictement compris entre 0 et 1)

Initialisation

n prend la valeur 0

Traitement

Tant que $q^n \geq a$
 n prend la valeur $n + 1$
Fin de tant que

Sortie

Afficher n

BOUCLE « POUR i VARIANT DE 1 À n »

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

L'algorithme suivant permet de calculer les valeurs u_n .

Entrées

Saisir n (entier strictement positif)

Initialisation

i prend la valeur 1
 u prend la valeur 0

Traitement

Pour i variant de 1 à n
 u prend la valeur $u + \frac{1}{i}$
Fin Pour

Sortie

Afficher u

BOUCLE « SI ... ALORS ... SINON ... »

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme ci-dessous, la variable aléatoire X prenant la valeur C affichée suit

la loi binomiale $B\left(9; \frac{2}{7}\right)$.

Initialisation

A prend la valeur 0
 C prend la valeur 0

Traitement

Répéter 9 fois
 A prend une valeur aléatoire entre 1 et 7
Si $A > 5$ alors
 C prend la valeur $C + 1$
Fin Si
Fin Répéter

Sortie

Afficher C

Algorithmique

Un algorithme est la décomposition d'une action en instructions élémentaires. L'énoncé en français doit être traduit en langage « machine » pour effectuer un traitement sur une calculatrice ou un ordinateur.

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Un algorithme est une liste d'instructions à suivre pas à pas, qui permettent d'obtenir des résultats à partir de données.

Un algorithme est donc caractérisé par trois blocs : les données, le traitement et les résultats.

Quelles sont les étapes pour écrire un programme informatique ?

Il y a trois étapes principales : analyser le problème posé ; écrire un algorithme ne dépendant pas d'un langage ; traduire l'algorithme dans un langage de programmation.

Quelles sont les instructions élémentaires à connaître ?

Il s'agit essentiellement des instructions relatives aux variables : entrées, sorties et affectations.

Les entrées : ces instructions jouent un double rôle ; créer la variable et lui affecter une valeur.

On les note : Saisir A ; Demander A ; Lire A ; « $A =$ » ; Input A ...

Les sorties : ces instructions permettent d'afficher un résultat. On les note : Afficher (A) ; Disp A ...

Les affectations : ces instructions permettent l'attribution d'une valeur (ou d'un texte...) à une variable.

Il existe plusieurs procédés : littéral « A prend la valeur $A + 1$ » ; symbolique « $A := A + 1$ » ou encore « $A \leftarrow A + 1$ ».

Quels sont les différents types de données ?

Il existe trois principales catégories de données : les nombres (entiers, décimaux, réels) ; les caractères et chaînes de caractères ; les tableaux contenant des nombres, des caractères ou des chaînes de caractères.

Qu'est-ce qu'un itérateur ?

Un itérateur est une variable entière qui permet de pouvoir répéter plusieurs fois la même suite d'instructions, on dit aussi compteur. Pour faire le lien avec les mathématiques, on peut dire que l'itérateur joue le même rôle que l'indice pour les suites.

Qu'est-ce qu'une boucle ?

La répétition de la même suite d'instructions un certain nombre de fois s'appelle une boucle ou une structure itérative. La question importante est « comment arrêter la boucle » ?

En fait, il y a deux méthodes à choisir en fonction du problème : soit on connaît un test d'arrêt, soit on connaît le nombre de fois que doit s'effectuer la répétition.

Lorsque l'on connaît le nombre de répétitions on utilise la boucle : Pour...FinPour.

Lorsque l'on connaît un test d'arrêt (*condition*) on peut utiliser deux boucles : Répéter... Jusqu'à *condition* ou Tant que *condition*... FinTantque.

La structure alternative : « si...alors...sinon... »

La structure est définie par :

Si *condition* alors

Suite d'instructions 1

Sinon

Suite d'instructions 2

FinSi

DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

• **Aussi sûr que 2 et 2 font 4** p. 63
(Cédric Villani, *Le Monde* daté du 21.01.2012)

• **Les algorithmes, « révolution industrielle » du trading** p. 63-64
(Damien Leloup, *Le Monde* daté du 18.06.2010)

Éléments du raisonnement mathématique

La logique étudie la formulation des raisonnements. C'est une branche des mathématiques, au même titre que l'algèbre ou la géométrie.

Quelle est la différence entre les quantificateurs « Quel que soit » et « Il existe » ?

L'égalité $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ est vraie quel que soit le nombre réel x . C'est-à-dire qu'en remplaçant x par n'importe quel nombre réel dans le membre de gauche et dans le membre de droite, on obtient le même résultat. Pour le prouver, on développe le membre de gauche.

« Quel que soit » est un **quantificateur universel**.

L'égalité $x^2 = 2x$ n'est pas vraie pour $x = 4$, mais elle est vraie pour $x = 2$. On peut donc affirmer qu'il existe un nombre réel x tel que l'égalité soit vraie.

« Il existe » est un **quantificateur existentiel**.

Ces quantificateurs sont souvent sous-entendus dans le langage courant.

Quelle est la différence entre « condition nécessaire » et « condition suffisante » ?

Dans la déduction « Si le quadrilatère est un rectangle alors il possède deux angles droits », la proposition « il possède deux angles droits » (Q) est une condition nécessaire pour la proposition « le quadrilatère est un rectangle ».

Elle n'est pas suffisante car un quadrilatère qui a deux angles droits peut être seulement un trapèze rectangle. Pour que la condition soit suffisante il faut, par exemple, la proposition « il possède quatre angles droits ».

Comment distinguer « proposition réciproque » et « contraposée » ?

La proposition « Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » permet de calculer la

mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure des deux autres.

Sa réciproque « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A » fournit un outil pour prouver qu'un triangle est rectangle.

Sa contraposée « Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A » permet d'établir, par un calcul, qu'un triangle n'est pas rectangle.

L'énoncé réciproque de la propriété « Si P alors Q » est « Si Q alors P ». Sa contraposée est « Si non Q alors non P ».

Lorsque l'énoncé direct et l'énoncé réciproque sont vrais, on dit que les propositions sont équivalentes.

Comment infirmer à l'aide d'un contre-exemple ?

L'énoncé « Pour entier naturel n on a $(n + 2)^2 = n^2 + 4$ » est faux. On peut le prouver en remplaçant n par 1 : $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$ et $1^2 + 4 = 5$.

Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on montre à l'aide d'un contre-exemple qu'elle est fautive dans l'un des cas.

Qu'est-ce qu'un raisonnement par l'absurde ?

La négation de la proposition P « le nombre n est impair » est la proposition non P « le nombre n est pair ».

Pour établir qu'un nombre est impair, on peut raisonner par l'absurde en montrant qu'il est impossible que n soit divisible par 2.

Plus généralement, pour montrer qu'une proposition P est fautive, on peut prouver que supposer non P vraie conduit à une impossibilité.

MOTS CLÉS

CONDITION

Lorsqu'une proposition P implique une proposition Q , on dit que :

- P est une condition suffisante pour Q s'il suffit que P soit vraie pour que Q le soit ;
- P est une condition nécessaire pour Q s'il faut que P soit vraie pour que Q le soit.

IMPLICATION

Dire que la proposition P implique la proposition Q signifie que si P est vraie alors Q est vraie ou que Q est la conséquence de P .

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Soit P et Q deux propositions, la réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.

CONTRAPOSÉE

La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$.

ÉQUIVALENCE

- On dit que deux propositions P et Q sont équivalentes lorsque P implique Q et Q implique P .
- On dit aussi que Q (respectivement P) est une condition nécessaire et suffisante pour P (respectivement Q), ou que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

DISJONCTION DES CAS

Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble E , on peut démontrer que cette propriété est vraie pour les éléments de sous-ensembles disjoints de E , dont la réunion est E : on a raisonné par disjonction des cas.

CONTRE-EXEMPLE

Pour prouver qu'une propriété est fautive, il suffit d'exhiber un seul élément pour lequel cette propriété n'est pas vraie. On dit alors qu'on a démontré que la propriété est fautive en donnant un contre-exemple. Un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé est faux.

CONJECTURE

Une conjecture est une propriété suggérée par l'intuition ou par l'observation d'exemples, mais qui n'est pas encore démontrée.

EXERCICES PAS À PAS

Amérique du Nord (mai 2013)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

La bonne méthode

1. a) Faites fonctionner l'algorithme par étapes successives jusqu'à $n = 3$.

b) Généraliser le cas précédent.

c) Étudiez le signe, les variations et l'évolution des valeurs de u_n données.

2. a) La démonstration par récurrence est facilitée en étudiant les variations de la fonction f qui vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) Utilisez à nouveau la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

c) Appliquez un théorème de convergence.

3. a) Montrez que $v_{n+1} - v_n$ est constant.

b) Utilisez la formule du cours pour exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire l'expression de u_n .

c) Tenir compte du fait que $0 < \frac{1}{2} < 1$.

d) Mettre en place une boucle « Tant que » adaptée.

Sujet inédit

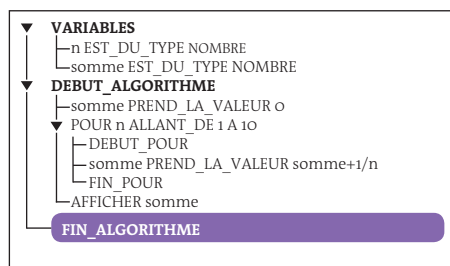
On considère l'algorithme ci-contre :

À quel calcul correspond la valeur de la variable « somme » qui est affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

a) L'inverse des entiers de la somme de 1 à 10.

b) La somme des inverses des entiers de 1 à 10.

c) L'inverse de 10.



La bonne méthode

À chaque étape, pour n entier compris entre 1 et n , on rajoute la valeur « $\frac{1}{n}$ » à la variable « somme ».

Aussi sûr que 2 et 2 font 4

Dans les programmes informatiques modernes, de plus en plus complexes, se fauillent souvent des erreurs de programmation, les tristement célèbres bugs qui peuplent les cauchemars des programmeurs. Nous avons appris à vivre avec ces erreurs parfois exaspérantes, appliquant des rustines informatiques sur les programmes défaillants.

Mais il est des domaines où la moindre erreur peut conduire à la catastrophe, comme le piratage d'un système informatique. Même quand il n'y a pas malice, les conséquences d'une erreur de programmation peuvent être économiquement désastreuses ; ainsi, le célèbre épisode du « Pentium buggé » de 1994, commercialisé par Intel : le remplacement de ces puces mal calibrées, qui effectuaient parfois des calculs erronés, arrache à son fabricant près d'un demi-milliard de dollars. Deux ans plus tard, un autre bug coûte encore plus cher : à la suite d'une petite erreur de programmation, le prototype de la fusée Ariane-5

explose quarante secondes après le décollage !

Quand les programmes informatiques mettent en jeu des vies humaines, on ne peut tolérer un tel risque ; il faut donc garantir la fiabilité des programmes. C'est en particulier le cas pour les commandes électroniques de vol des avions modernes, ces programmes informatiques qui font l'interface entre les commandes des pilotes et les réponses de l'avion. Actuellement ces systèmes, dits embarqués, sont vérifiés par de longues procédures de tests que l'on espère exhaustifs ; on imagine sans mal l'intérêt que représenterait un programme informatique sûr, capable de les vérifier automatiquement. Un programme qui vérifie d'autres programmes ! Alan Turing, le père de l'informatique moderne, avait déjà anticipé ce besoin dans les années 1940. La tâche est d'autant moins simple que les programmes ne sont jamais écrits directement dans le langage binaire que parlent les ordinateurs : on commence par les écrire dans un langage qui ressemble à une

langue humaine, avant de les traduire au moyen d'un programme complexe, le compilateur, en un programme fait d'une suite monotone de 0 et de 1. Pour éliminer les risques d'erreur, il faut donc également vérifier le compilateur...

En 2004, Xavier Leroy et son équipe de l'Institut national de recherche en informatique et automatique (Inria) se lancent de ce fait dans l'ambitieux projet « Compcert » : écrire un compilateur C – langage couramment utilisé pour réaliser des logiciels embarqués – et le certifier fiable au moyen du langage Coq, conçu pour vérifier automatiquement les preuves mathématiques.

Après tout, un programme informatique ressemble dans sa structure logique à une preuve mathématique !

Ce projet vient d'entrer dans la phase finale, avec des tests réalisés en collaboration avec Airbus. Pour la première fois, on pourra valider un compilateur complexe sans l'ombre d'un doute ! Dans le même temps, une équipe australienne annonce un résultat complémentaire impressionnant : la certification d'un système d'exploitation entier. Connaîtrons-nous un monde où les bugs auront été éradiqués ? ■

Cédric Villani

Le Monde daté du 21.01.2012

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article traite du problème que posent **les erreurs possibles dans un programme informatique**.

Il donne des exemples d'erreurs et il explique ensuite comment les informaticiens ont essayé de remédier à ces erreurs : en plus de garantir la validité du programme écrit dans un langage donné, ils ont cherché à certifier fiable le compilateur de ces programmes. Ce qui est en passe d'être fait.

Les algorithmes, « révolution industrielle » du trading

D'après l'expression « trading algorithmique » se cachent des réalités très différentes, de la plus simple à la plus complexe. Les programmes utilisés par les courtiers se divisent en deux catégories principales : les logiciels d'aide à la décision, et ceux dotés d'une intelligence artificielle élaborée, qui sont capables de faire des choix en fonction d'une

multitude de critères, comme le ferait un être humain.

Ces derniers, réservés aux très gros acteurs du marché comme le Crédit suisse ou Goldman Sachs, ne représentent pas la « norme » des logiciels d'algorithmique. La plupart de ces programmes remplissent surtout des fonctions répétitives ou demandant une très grande précision.

« Un algorithme typique, c'est un algorithme de pourcentage de volume : on peut par exemple lui demander d'acheter 1 % de toutes les actions disponibles sur le marché d'une entreprise », détaille Benjamin Bécar, chef de produit trading algorithmique pour Sungard, qui édite des logiciels clés en main ou sur mesure. « La plupart de nos clients souhaitent avant tout simplifier leur travail au quotidien ; l'arrivée de

l'informatique dans les salles de marché a permis d'automatiser un grand nombre de tâches, tout comme la révolution industrielle a mécanisé les chaînes de production. » Incidemment, cette automatisation permet aussi aux entreprises de limiter le nombre de salariés dont elles ont besoin.

Modèles mathématiques

La clef de l'efficacité des algorithmes repose sur deux facteurs : la précision du programme, qui est capable d'effectuer de nombreuses opérations dans des délais très rapprochés, ou au contraire très longs, et sa capacité d'arbitrer des choix en se basant sur de grands volumes de données. Le VWAP, un algorithme courant, joue par exemple sur ces deux tableaux. En découpant les ordres d'achat au fil d'une journée de trading, en fonction des moments où le volume d'échanges est le plus important, il permet au trader de ne mobiliser des fonds qu'aux moments les plus pertinents, et de conserver ainsi un maximum de liquidités.

Pour élaborer un algorithme de trading, les informaticiens spécialisés doivent d'abord identifier précisément quel est le besoin du trader, et créer un modèle mathématique, composé d'une ou plusieurs formules intégrant des paramètres variés, comme le prix en temps réel ou la quantité de liquidités dont dispose le trader. « *Pour être performant, un algorithme doit être en mesure de lire les market data – cash et dérivé – et de les comparer à l'index* », résume Benjamin Bécarr. Ce modèle

permet de calculer quels sont les ordres qui doivent être passés, par exemple, pour obtenir un nombre X d'actions d'une société Y à un prix Z.

Mais les programmes ne se basent pas uniquement sur des formules créées « dans l'absolu » : ils tiennent aussi compte de l'historique des échanges des semaines ou des mois précédents. Au fil des ans, les différentes places de marché ont commencé à publier leurs données complètes au jour le jour, ce qui a permis aux chercheurs de monter des simulations précises du fonctionnement d'un marché. À partir de 2002, par exemple, des chercheurs réunis au sein du Platt ont mis au point une simulation informatique émulant le fonctionnement du Nasdaq, qui a servi de base à plusieurs concours mettant aux prises des algorithmes de trading, pour déterminer lequel était le plus efficace.

Espionnage industriel

Ces archives et ces simulations sont des outils précieux pour « tester » le fonctionnement d'un nouvel algorithme sans prendre de risques sur un marché réel. On peut ainsi « voir » comment se serait

comporté un programme sur les derniers mois. Mais un historique d'échanges ne permet jamais de tout prévoir, notamment lorsqu'un événement d'actualité vient bousculer le fonctionnement normal des échanges. « *Certains algorithmes très sophistiqués sont capables de réagir en fonction de très nombreuses variables, y compris des événements d'actualité. Mais ils sont l'apanage des plus importants investisseurs, et leurs secrets de fonctionnement sont jalousement gardés* », explique Benjamin Bécarr.

Effectivement, les investisseurs ne plaisantent pas avec la confidentialité de leurs logiciels : en juillet 2009, le FBI a procédé à l'arrestation d'un programmeur salarié jusqu'en juin de Goldman Sachs, où il travaillait à l'accélération des transactions. L'entreprise l'accuse d'avoir copié avant

son départ de larges parties du code-source de certains de ses algorithmes, et de vouloir les revendre à la concurrence. En avril, un employé de la Société générale, soupçonné d'avoir dérobé des codes d'accès, a lui aussi été arrêté par le FBI.

Pour les grandes firmes utilisant le trading algorithmique, le risque n'est pas tant que leurs concurrents s'emparent de leurs technologies pour les utiliser eux-mêmes. À ce niveau de complexité, il est difficile de mettre en pratique directement du code volé à un concurrent. Mais le risque d'espionnage industriel est loin d'être nul : la rétro-ingénierie de leurs logiciels permettrait surtout à des concurrents d'obtenir des informations précises sur la stratégie de trading de l'entreprise. ■

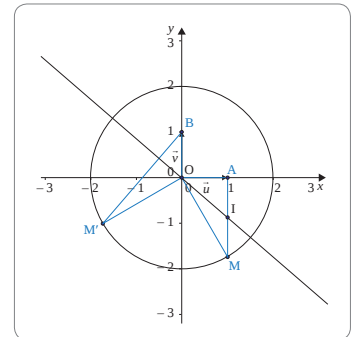
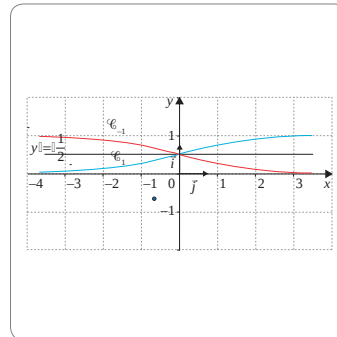
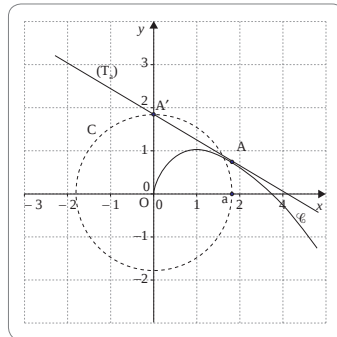
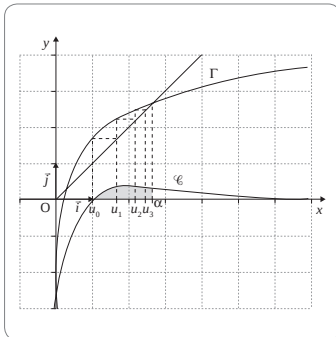
Damien Leloup

Le Monde daté du 18.06.2010

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article nous montre que **les algorithmes sont également utilisés dans la finance**, pour rendre automatiques les opérations qui répondent à un critère précis. Lorsque l'on parle de taxer les transactions financières, c'est de ce type de transactions qu'il s'agit : elles sont jugées dangereuses, notamment en raison des erreurs possibles, et peuvent avoir des conséquences problématiques très rapidement.

CORRIGÉS



Suites

p. 8

Corrigé Métropole (juin 2013)

1. a) On remplace n par 0 dans la relation de récurrence de l'énoncé et on obtient :

$$u_1 = \frac{2}{3} \times u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3} \approx 2,33.$$

De même :

$$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9} \approx 2,89$$

$$u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{97}{27} \approx 3,59$$

$$u_4 = \frac{2}{3} \times \frac{97}{27} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{356}{81} \approx 4,40.$$

b) La suite semble être croissante.

2. a) On veut montrer par récurrence, pour tout entier naturel n , la propriété $P_n : u_n \leq n + 3$.

Initialisation : puisque $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, P_0 est bien vraie.

Hérédité : pour un entier naturel k donné, on suppose la propriété P_k vraie.

$$\text{On a } u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1.$$

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leq k + 3$, d'où :

$$\frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}k + 2$$

$$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1.$$

Et finalement, $u_{k+1} \leq k + 3 \leq k + 4$.

La propriété P_{k+1} est donc vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \leq n + 3$.

$$\text{b) } u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (n + 3 - u_n)$$

c) Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq n + 3$,

soit $n + 3 - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est bien croissante.

3. a) Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de u_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n).$$

D'où $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. Ceci prouve que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b) D'après le cours on en déduit que : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Puisque $v_n = u_n - n$, on en déduit que

$u_n = v_n + n$ pour tout entier naturel n ,

et on aboutit à l'expression demandée :

$$u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

c) On a $-1 < q < 1$. On en déduit que la limite de la suite (v_n) est 0 et la limite de la suite (u_n) est donc $+\infty$.

4. a) $S_n = X_n + Y_n$ avec $X_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $Y_n = \sum_{k=0}^n k$.

$$X_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$X_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$X_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$Y_n = \frac{0 + n}{2} \times (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Finalement, on a :

$$S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n + 1)}{2}.$$

$$\text{b) } T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n + 1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2 + n}{2n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$, donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6.$$

Étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par produit,

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$$

$$\text{Enfin } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}.$$

Corrigé Antilles-Guyane (sept. 2010)

1. On a $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{3}{4}$.

On a $u_2 - u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$, d'où $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$$\text{On a } \frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}, \text{ d'où } \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}.$$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1$.

b) Pour tout entier naturel n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}.$$

Or on sait que $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$, d'où

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

$$\text{Soit } v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n.$$

c) Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d) D'après la définition d'une suite géométrique, on a pour tout entier naturel n : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$

3. a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$.

b) Pour tout entier naturel n , on a $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$.

Or on sait que $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

D'où $w_{n+1} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$, soit

$$w_{n+1} = \frac{\frac{2v_n + u_n}{2}}{\frac{v_n}{2}} = \frac{2v_n + u_n}{v_n}.$$

c) D'après la question précédente, on sait que pour tout entier naturel n , on a :

$$w_{n+1} = \frac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n.$$

d) D'après la question précédente, la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison 2

et de premier terme $w_0 = -1$. Par définition, on a : $w_n = -1 + 2n$.

4. On sait que pour tout entier naturel n , on a : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = w_n \times v_n$.

Or $w_n = -1 + 2n$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$, donc

$$u_n = (2n - 1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n - 1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n , on a : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
On veut montrer par récurrence que $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.

Initialisation : on a $S_0 = u_0 = -1$ et

$$2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = -1.$$

La formule est donc vraie pour $n = 0$.

Soit n un nombre entier naturel, on suppose que la formule est vraie au rang n , c'est-à-dire que $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.

Au rang $n + 1$, on a : $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

Or $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$, soit

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1) - 1}{2^{n+1}} = \frac{2n + 1}{2^{n+1}}.$$

D'où $S_{n+1} = 2 - \frac{2n + 3}{2^n} + \frac{2n + 1}{2^{n+1}}$

$$= 2 - \frac{2(2n + 3) - 2n - 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n + 5}{2^{n+1}}.$$

Finalement : $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1) + 3}{2^{n+1}}$.

La formule est donc vraie au rang $n + 1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires p. 14

Corrigé Métropole (juin 2013)

1. a) Le point B étant le point de la courbe d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, $f(1) = 2$. Par ailleurs, la tangente en B à la courbe est horizontale, donc le coefficient directeur de cette tangente est égal à 0 et $f'(1) = 0$.

b) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Par ailleurs :

$$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{b - (a + b \ln x)}{x^2}.$$

Et finalement : $f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln x}{x^2}$.

c) $f(1) = \frac{a + b \ln 1}{1} = a$, or d'après le 1. a), $f(1) = 2$, d'où $a = 2$.

On a $f'(1) = \frac{(b - 2) - b \ln 1}{1^2} = b - 2$, or d'après le 1. a), $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. a) On remplace a et b par 2, dans l'expression de f' et on obtient :

$$f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} = \frac{2}{x^2} \times (-\ln x).$$

Puisque pour tout $x > 0$, $\frac{2}{x^2} > 0$, le signe de

f est le même que celui de $-\ln x$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

b) Quand x tend vers 0^+ , $\ln x$ tend vers $-\infty$ d'où par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + 2 \ln x = -\infty.$$

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

On remarque que $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,

d'après la propriété des croissances comparées. Donc par produit et somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) $-\ln x > 0$ est équivalent à $\ln x < 0$, soit $x < 1$.

f est donc croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	2	0

3. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$ et $1 \in]-\infty; f(1)[$, on peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $]0; 1]$, et en déduire l'existence et l'unicité d'une solution α à l'équation $f(x) = 1$.

b) Grâce à la calculatrice et la technique dite de balayage, on prouve que l'unique solution

β de l'équation $f(x) = 1$ sur $]1; +\infty[$ appartient à l'intervalle $]5; 6[$. Donc que l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$ est $n = 5$.

Corrigé Polynésie (juin 2010)

1. a) La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable et strictement positive sur $]1; +\infty[$.

L'image de cet intervalle par $x \mapsto 2x$ est compris dans l'intervalle $[2; +\infty[$.

Sur cet intervalle, la fonction $\ln$ est dérivable. Donc la fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée de deux fonctions dérivables.

De plus, la fonction $x \mapsto 1 - x$ est dérivable sur $]1; +\infty[$.

Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Sur $]1; +\infty[$, on a $x \geq 1$ et $1 - x \leq 0$, donc

$$g'(x) \leq 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Enfin $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $2x$ tend vers $+\infty$ et $\ln(2x)$ tend vers $+\infty$.

On a donc une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, on a :

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x = x \left(\frac{\ln(2x)}{x} + \frac{1}{x} - 1 \right).$$

Soit

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x = x \left(2 \frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{x} - 1 \right).$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(2x)}{2x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(2x)}{x} + \frac{1}{x} - 1 = -1.$$

En utilisant la règle des signes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

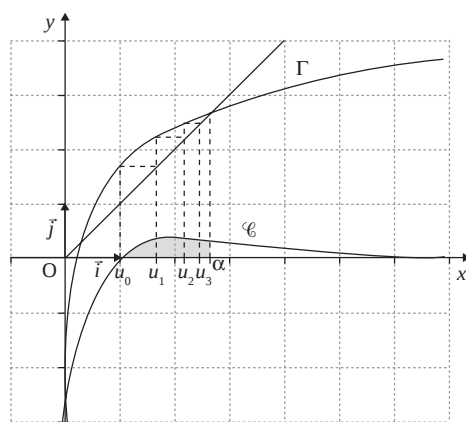
Donc la fonction g est dérivable, continue sur $]1; +\infty[$ à valeurs dans $] -\infty; \ln 2]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $0 \in] -\infty; \ln 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) D'après la question précédente, on sait que $g(\alpha) = 0$.

Donc, $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$, soit $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. a)



b) On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Initialisation : on a $u_0 = 1$ et

$$u_1 = \ln 2 + 1 \approx 1,69.$$

Donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que jusqu'au rang k , on a $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3$.

On a donc $2 \leq 2u_n \leq 2u_{n+1} \leq 2 \times 3$,

soit $\ln 2 \leq \ln(2u_n) \leq \ln(2u_{n+1}) \leq \ln 6$,

puis $\ln(2) + 1 \leq \ln(2u_n) + 1 \leq \ln(2u_{n+1}) + 1 \leq \ln 6 + 1$, avec $\ln 6 + 1 \approx 2,8$ soit $\ln 6 + 1 < 3$.

On a donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.

Donc elle est convergente vers une limite l qui vérifie $\alpha = \ln(2l) + 1$, d'où $l = \alpha$.

Dérivation

p. 17

Corrigé sujet inédit

1. La bonne réponse est : $y = x + 1$.

Une équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici $a = 0$, donc la tangente a pour équation : $y = f'(0)x + f(0)$.

De plus $f(x) = e^x$, d'où $f(0) = e^0 = 1$, et $f'(x) = e^x$, d'où $f'(0) = e^0 = 1$.

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0 admet pour équation $y = x + 1$.

2. La bonne réponse est : $y = x + 2$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

$$f(1) = 3\ln 1 - 2 \times 1 + 5 = 3.$$

Pour tout $x > 0$: $f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 2$ donc

$$f'(1) = 3 \times \frac{1}{1} - 2 = 1.$$

Une équation de la tangente est donc :

$$y = 1 \times (x - 1) + 3, \text{ soit } y = x + 2.$$

3. La bonne réponse est : $h'(1) = 1,5$.

On sait que la droite (AB) est la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point B d'abscisse 1.

Le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point.

$$\text{Donc } h'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{1 - 3} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

4. La bonne réponse est : strictement négatif.

On a $0 < \ln(1,5) < \ln(2)$.

D'après le tableau de variations, sur l'intervalle $]0 ; \ln(2)[$ la fonction f est strictement décroissante.

Donc sur cet intervalle la dérivée f' de la fonction f est strictement négative, par conséquent $f'(\ln(1,5)) < 0$.

Or $f'(\ln(1,5))$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f au point d'abscisse $\ln(1,5)$.

Donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f au point d'abscisse $\ln(1,5)$ est strictement négatif.

5. La bonne réponse est : pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2e^{-2x+1}.$$

La fonction f définie sur l'ensemble des réels est de la forme e^u , sa dérivée sera donc de la forme $u'e^u$.

Pour tout réel x , on a $u(x) = -2x + 1$ donc $u'(x) = -2$.

Donc pour tout réel x on a : $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

6. La bonne réponse est : $f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

En posant $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$, on a :

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = (uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

donc :

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

7. a) On considère la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x+1)$.

La dérivée f' de la fonction f est définie sur $]0 ; 4]$ par $f'(x) = -2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

b) Pour étudier le sens de variations de la fonction f , il faut étudier le signe de la dérivée f' .

Pour $x \in [0 ; 4]$, on a : $f'(x) = -2x - 1 + \frac{1}{x+1}$.

On réduit au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{(-2x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}.$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x - x - 1 + 1}{x+1} = \frac{-2x^2 - 3x}{x+1}.$$

On factorise le numérateur :

$$f'(x) = \frac{x(-2x-3)}{x+1}.$$

On a $-2x-3 = 0$ lorsque $x = -\frac{3}{2}$.

Donc lorsque $x > -\frac{3}{2}$, on a $-2x-3 < 0$.

Lorsque $x > -1$, on a $x+1 > 0$.

Donc sur l'intervalle $[0 ; 4]$ on a :

$x > 0$, $-2x-3 < 0$ et $x+1 > 0$.

En appliquant la règle des signes, on en déduit que sur l'intervalle $[0 ; 4]$, $f'(x) < 0$.

Donc sur l'intervalle $[0 ; 4]$, la fonction f est strictement décroissante.

Fonctions sinus et cosinus

p. 21

Corrigé sujet inédit

1. a) On a : $f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2} \times 2\sin(2x)$

$$= -\sin(x) - \sin(2x)$$

pour tout $x \in [0 ; 2\pi]$.

b) En utilisant la relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on a pour tout $x \in [0 ; 2\pi]$:

$$f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x) [1 + 2\cos(x)].$$

2. Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul.

Donc $\sin(x) [1 + 2\cos(x)] = 0$ équivaut à :

$$\sin(x) = 0 \text{ ou } 1 + 2\cos(x) = 0.$$

Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, les solutions de la première équation sont : $0 ; \pi$ et 2π .

La seconde équation équivaut à $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

Sur $[0 ; 2\pi]$, ses solutions sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

$$\text{D'où } S = \left\{ 0 ; \frac{2\pi}{3} ; \pi ; \frac{4\pi}{3} ; 2\pi \right\}.$$

3. a) La dérivée est positive lorsque sa représentation graphique est au-dessus de l'axe des abscisses et négative lorsqu'elle est au-dessous.

D'où le tableau de signes de $f'(x)$:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
Signe de $f'(x)$	0	-	0	+	0

b) Les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$ sont :

$$f(0) = \cos 0 + \frac{1}{2} \cos 0 + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2,5 ;$$

$$f(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2} \cos(2\pi) + 1 = -1 + \frac{1}{2} + 1 = 0,5 ;$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \end{aligned}$$

soit $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} = 0,25$.

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + 1$$

soit $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0,25$.

$$f(2\pi) = \cos(2\pi) + \frac{1}{2}\cos(4\pi) + 1$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2,5.$$

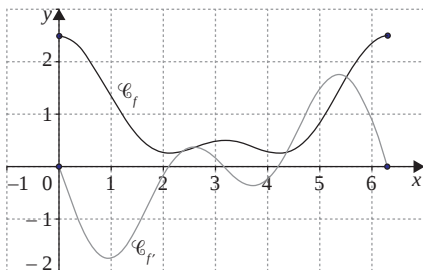
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π				
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	2,5		0,25		0,5		0,25		2,5

4. Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,5	1,3	0,3	0,5	0,3	0,9	2,4

Représentation graphique :



Corrigé Nouvelle-Calédonie (mars 2013)

La proposition « La courbe représentative de f est la courbe 3. » est fausse.

Sachant que la primitive F de f s'annule en $x = 0$, sa courbe représentative est la courbe 1.

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $F'(x) = f(x)$.

Or, f est positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc la

fonction F devrait être croissante sur cet intervalle.

On observe sur la courbe 1 que ce n'est pas le cas.

La courbe 1 est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto -4\sin(2x)$.

La courbe 2 est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 2\cos(2x)$.

La courbe 3 est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sin(2x)$.

La courbe 3 est la représentation graphique de la primitive F , la courbe 2 celle de la fonction f et la courbe 1 celle de la dérivée f' .

Fonction exponentielle p. 25

Corrigé Liban (mai 2013)

Partie A

1. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = 0$, alors par somme et passage à l'inverse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$.
Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$, alors par somme et passage à l'inverse $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$.
Graphiquement, cela revient à dire que les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathcal{C}_1$, respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc $f_1(x) = \frac{e^x \times 1}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

3. La fonction f_1 est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$. On a $f_1' = -\frac{u'}{u^2}$, soit :

$$f_1'(x) = -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

$f_1'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f_1 est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. On définit la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = 1 + e^x$. v est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors, d'après le 2., $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{v'(x)}{v(x)}$.

Une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

$$D'où I = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

$$= [\ln(1 + e^x)]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right).$$

Il correspond à l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle

de côté 1 et de longueur $\ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) \approx 0,62$ (u.a.).

Partie B

1. Pour tout réel x ,

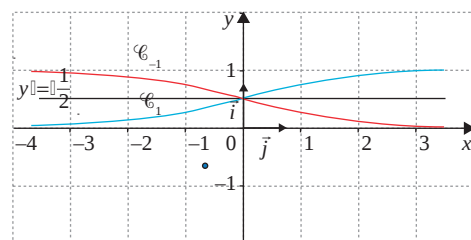
$$f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1.$$

2. Or K est le milieu de $[MP]$, où P a pour coordonnées $(x; f_1(x))$ et $M(x; f_{-1}(x))$ donc :

$$y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_{-1}(x) + f_1(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Le point K appartient donc à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3. De la question précédente on déduit que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$, d'où la construction demandée.



4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 2 \int_0^1 \left(f_1(x) - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 1 dx \\ &= 2I - 1 = 2 \ln \left(\frac{1+e}{2} \right) - 1 \approx 0,24.\end{aligned}$$

Partie C

1. **Vrai.** Quels que soient les réels x et k :
 $e^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + e^{-kx}} < 1.$

2. **Faux.** Par exemple, pour tout réel x ,
 $f'_1(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, donc $f'_1(x) < 0$. La fonc-

tion f_{-1} est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **Vrai.** Si $k \geq 10$ alors $-\frac{1}{2}k \leq -5$ puis

$e^{-\frac{1}{2}k} \leq e^{-5}$ puisque la fonction exponentielle est strictement croissante et enfin :
 $1 + e^{-\frac{1}{2}k} \leq 1 + e^{-5}.$

Finalement :

$$0,99 < 0,9933 \leq \frac{1}{1 + e^{-5}} \leq \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right).$$

Corrigé Inde (avril 2013)

Partie A

Des données de l'énoncé on déduit que :
 $h(0) = 0,1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2.$

Or, $h(0) = \frac{a}{1+b}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$, puisque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0.$$

D'où $a = 2$ et $\frac{2}{1+b} = 0,1$ soit $\frac{1+b}{2} = 10$ et finalement $a = 2$ et $b = 19.$

$$\text{Ainsi } h(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}.$$

Partie B

1. Pour, $f(t) = \frac{k}{v(t)}$, avec $k = 2$

$$\text{et } v(t) = 1 + 19e^{-0,04t}, \text{ donc } f'(t) = -\frac{kv'(t)}{v^2(t)}.$$

Mais $v'(t) = -0,76e^{-0,04t}$ puisque
 $(e^u)'(t) = u'(t)e^{u(t)}$ pour tout t réel.

$$\text{Donc } f'(t) = -\frac{-1,52e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}.$$

Étant donné que $e^x > 0$ pour tout x réel, on a
 $f'(t) > 0$ sur l'intervalle $[0 ; 250].$

f est strictement croissante sur l'intervalle
 $[0 ; 250].$

2. Cela revient à déterminer les valeurs de t
pour lesquelles $f(t) > 1,5.$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} > 1,5$$

$$\frac{1 + 19e^{-0,04t}}{2} < \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

$$3 + 57e^{-0,04t} < 4$$

$$e^{-0,04t} < \frac{1}{57}$$

$$-0,04t < -\ln(57).$$

Finalement on trouve $t > 25 \ln(57) \approx 101,1.$

Pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m, il faut que le temps t soit d'au moins 102 jours.

3. **a)** On multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(t)$ par $e^{0,04t}$ et on obtient directement le résultat recherché.

On dérive la fonction F . En posant, pour tout
 $t \in [0 ; 250], u(t) = e^{0,04t} + 19$, alors :

$$F(t) = 50 \ln(u(t)).$$

Par ailleurs $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et la dérivée de e^v
est égale à $v'e^v$.

$$\text{On a donc } F'(t) = 50 \frac{u'(t)}{u(t)} = 50 \frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$$

$$= \frac{2e^{0,04t}}{19 + e^{0,04t}} = f(t).$$

Sur $[0 ; 250]$, puisque $F' = f$, F est bien une
primitive de f .

- b)** La valeur moyenne de f sur $[50 ; 100]$ est :

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{50} \int_{50}^{100} f(t) dt = \frac{F(100) - F(50)}{50} \\ &= \ln \left(\frac{e^4 + 19}{e^2 + 19} \right).\end{aligned}$$

La valeur approchée à 10^{-2} près de m est
donc égale à 1,03.

Cela correspond à la taille moyenne du plant
de maïs entre le 50^e et le 100^e jour.

4. Au temps t , la vitesse de croissance du plant
de maïs est donnée par le nombre dérivé $f'(t)$
qui correspond au coefficient directeur de la
tangente à la courbe au point d'abscisse t .

On lit sur le graphique la valeur de $t_{\max}$ pour
laquelle le coefficient directeur de la tan-
gente semble maximal : une valeur appro-
chée de $t_{\max}$ est alors 74.

La hauteur du plant est alors d'environ 1 m,
à 10 cm près.

Fonction logarithme népérien

p. 30

Corrigé sujet inédit

1. Pour dériver le premier terme, on applique la formule de la dérivée d'un produit :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x), \text{ avec } u(x) = -x \text{ et } v(x) = \ln x.$$

$$\text{Soit } f'(x) = -1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} + 2 = -\ln x + 1.$$

2. a) On résout l'inéquation $-\ln x + 1 \leq 0$, soit $1 \leq \ln x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, l'inéquation équivaut à $e^1 \leq e^{\ln x}$, d'où $x \geq e$.

Donc, pour $x \in [1; e]$, on a $f'(x) \geq 0$.

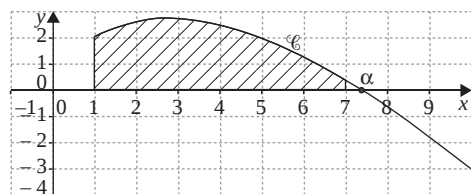
Pour $x \in [e; 10]$, on a $f'(x) \leq 0$.

- b) On déduit le tableau de variation de f de la question 2. a).

x	1	e	10
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

3. Tableau de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2	2,61	2,70	2,45	1,95	1,25	0,38	-0,64	-1,78	-3,03



4. a) L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α car la courbe coupe une seule fois l'axe des abscisses.

- b) Tableau de valeurs :

x	7,38	7,39
$f(x)$	0,009 1	-0,000 9

Donc $\alpha \approx 7,39$.

Corrigé Métropole (sept. 2010)

Partie A. Étude de la fonction f

1. $f(x)$ est un produit, pour étudier son signe on étudie le signe de chaque facteur et on utilise la règle des signes de la multiplication.

Le premier facteur est égal à x , sur l'intervalle $]0; +\infty[$ on a $x > 0$.

Le second facteur est égal à $1 - \ln x$.

On a $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, et $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

Conclusion : pour $0 < x < e$, on a $f(x) > 0$, $f(e) = 0$ et pour $x > e$, on a $f(x) < 0$.

2. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$.

En utilisant la règle des signes de la multiplication on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Pour tout réel x strictement positif, on a : $f(x) = x - x \ln x$.

D'après le cours, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0, \text{ soit } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

3. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Pour tout réel x strictement positif, la fonction f est du type uv donc sa dérivée f' est du type $u'v + uv'$, avec $u(x) = x$, d'où $u'(x) = 1$, et $v(x) = 1 - \ln x$ donc $v'(x) = -\frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 1 \times (1 - \ln x) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 1 - \ln x + 1 = -\ln x$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f(x)$			

$$f(1) = 1 \times (1 - \ln 1) = 1.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif.

L'équation de la tangente (T_a) au point A d'abscisse a est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- a) On a $f'(a) = -\ln a$ et

$$f(a) = a(1 - \ln a) = a - a \ln a.$$

L'équation de (T_a) est donc

$$y = -\ln a(x - a) + a - a \ln a,$$

$$\text{soit } y = -x \ln a + a.$$

On cherche les coordonnées du point A', point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées, c'est-à-dire lorsque $x = 0$, ou encore l'ordonnée à l'origine de la droite (T_a) . On trouve lorsque $x = 0$, $y = a$.

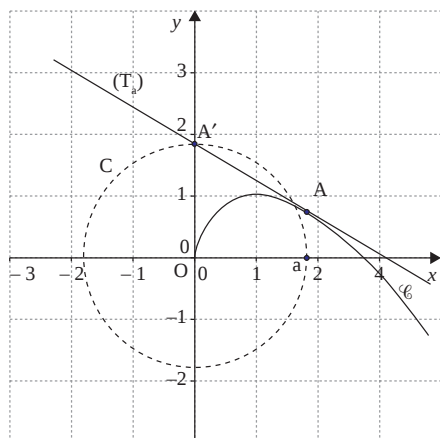
Donc A' a pour coordonnées $(0; a)$.

- b) Construction de la tangente au point A à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f .

Le point A d'abscisse a est donné.

On place le point A'(0; a) en traçant le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon a , ce cercle coupe l'axe des ordonnées en deux points, A' est celui des deux points qui a une ordonnée positive.

On trace ensuite la droite (T_a) passant par les points A et A'.



Partie B. Aire sous une courbe

Premier cas : $0 < a < e$.

D'après la question 1. de la partie A, on sait que la fonction f est strictement positive sur $]0; e[$.

La mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = e$ est par définition l'intégrale $\int_a^e f(x) dx$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx.$$

Second cas : $a > e$.

Toujours d'après la question 1. de la partie A, on sait que la fonction f est strictement négative sur l'intervalle $]e; +\infty[$.

La mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = e$ est par définition l'intégrale : $-\int_e^a f(x) dx$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx.$$

Conclusion : pour tout réel a strictement positif, on a $\mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx$.

Intégration

p. 34

Corrigé Amérique du Nord (mai 2013)

1. a) D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, d'où en effectuant

le produit des limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

b) D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et par ail-

leurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc en effectuant le pro-

duit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, et en ajoutant ces

deux dernières limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

c) L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2. a) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (1 + \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln x$.

Or, $-1 - 2 \ln x > 0$ pour $x < e^{-\frac{1}{2}}$ et $-1 - 2 \ln x < 0$ pour $x > e^{-\frac{1}{2}}$, d'où le signe de f' .

$$\text{c) On a } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2} \text{ et}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{e}{2}$	0

3. a) Un point appartient à l'intersection de deux ensembles si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux ensembles, ce qui revient à rechercher $x \in]0; +\infty[$, tel que $f(x) = 0$.

Étant donné que $x \neq 0$, cette équation équivaut à $1 + \ln x = 0$, soit $x = e^{-1}$. Cela prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point A de coordonnées $(e^{-1}; 0)$.

b) D'après les variations de f et comme $f(e^{-1}) = 0$, on en déduit que $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0; e^{-1}[$ et $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]e^{-1}; +\infty[$.

4. a) On sait que f est strictement positive sur

$$]e^{-1}; +\infty[, \text{ donc } I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx.$$

D'après les variations de f , on a sur $\left[\frac{1}{e}; 2\right]$:

$$0 < f(x) \leq \frac{e}{2}. \text{ L'intégration conservant l'ordre,}$$

$$\text{on en déduit } 0 < I_2 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx \text{ avec } \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx$$

$$= \frac{e}{2} \left(2 - \frac{1}{e}\right) = e - \frac{1}{2} \text{ et finalement}$$

$$0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}.$$

b) De même, f est strictement positive sur

$\left[\frac{1}{e}; +\infty\right]$, et F est une primitive de f sur le

même intervalle donc :

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx = \left[F(x) \right]_{\frac{1}{e}}^n = \left[\frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^n$$

$$= \frac{-2 - \ln n}{n} - \frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}}$$

$$= \frac{-2 - \ln n}{n} - (-2 + 1)e.$$

Et finalement $I_n = \frac{-2 - \ln n}{n} + e.$

c) I_n s'écrit aussi $I_n = -\frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} + e.$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e.$

Graphiquement cela revient à dire que l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé Liban (juin 2010)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout

entier naturel n par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx.$

a) On a :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-0 \times x}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-1 \times x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1.$$

Donc $u_0 + u_1 = 1.$

b) On a $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx.$

On pose, pour tout réel x , $u(x) = 1 + e^{-x}$, d'où $u'(x) = -e^{-x}.$

Par conséquent $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{u'(x)}{u(x)}.$

Or une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est $x \mapsto \ln(u(x)).$

Donc, une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ est $x \mapsto -\ln(1 + e^{-x}).$

D'où $u_1 = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^1$

$$= -\ln(1 + e^{-1}) + \ln(1 + e^0), \text{ soit}$$

$$u_1 = -\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2.$$

On sait, d'après le **a)**, que $u_0 + u_1 = 1.$

Donc $u_0 = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \ln 2.$

2. Pour tout entier naturel n et pour tout réel x ,

$$e^{-nx} > 0 \text{ et } 1 + e^{-x} > 0, \text{ donc } \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} > 0.$$

Par conséquent, $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx \geq 0.$

3. a) Pour tout entier n non nul, on a :

$$u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-nx}e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-nx} dx. \end{aligned}$$

D'où

$$u_n + u_{n+1} = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} e^{-n \times 0}.$$

Conclusion : pour tout entier n non nul,

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

b) D'après le **2.**, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq 0.$

Or $u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$, d'où $u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1}.$

Donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

4. Pour tout entier n non nul, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

$$\frac{1 - e^{-n}}{n} = \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) \text{ donc lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

on a : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $e^{-n} \rightarrow 0.$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1$ et par produit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

Nombres complexes

p. 40

Corrigé Pondichéry (avril 2013)

1. a) On a $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc

$$\begin{aligned} Z_M &= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

L'écriture algébrique de Z_M est $1 - i\sqrt{3}$.

b) Par définition, $Z_{M'} = -iZ_M$, donc si

$$Z_M = 1 - i\sqrt{3}, Z_{M'} = -i(1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i.$$

On a donc

$$|Z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$$

En notant $\theta = \arg(Z_{M'}) [2\pi]$, on a aussi :

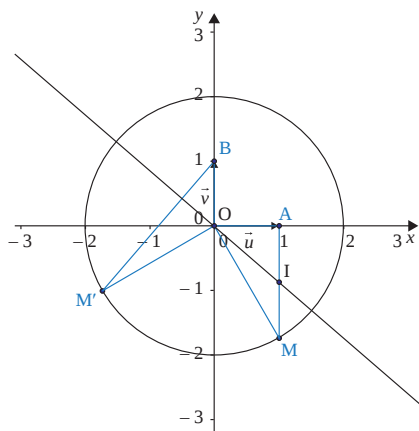
$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $\theta = \arg(Z_{M'}) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} [2\pi]$ en observant le cercle trigonométrique.

c) On a $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $M(1; -\sqrt{3})$ et $M'(-\sqrt{3}; -1)$.

De plus, I est le milieu de [AM] donc

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_M}{2} = \frac{1 + 1 - i\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } I(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$



On peut constater sur le graphique que les propriétés 1 et 2 sont vérifiées.

2. a) On a $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$ donc

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_M}{2} = \frac{1 + x + iy}{2} = \frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}i.$$

L'affixe du point I en fonction de x et y est

$$Z_I = \frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}i.$$

b) On a $Z_{M'} = -iZ_M = -i(x + iy) = y - ix$.

L'affixe du point M' en fonction de x et y est

$$Z_{M'} = y - ix.$$

$$c) Z_I = \frac{Z_A + Z_{M'}}{2} = \frac{1 + x + iy}{2} = \frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}i$$

d'où $I\left(\frac{1+x}{2}; \frac{y}{2}\right)$; $Z_B = i$ donc $B(0; 1)$;

$Z_{M'} = y - ix$ donc $M'(y; -x)$.

d) Pour montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' , montrons que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = 0$.

D'après la question précédente,

$$\overrightarrow{OI} = \left(\frac{1+x}{2}; \frac{y}{2} \right) \text{ et } \overrightarrow{BM'}(y; -x-1), \text{ donc dans}$$

le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$:

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = \frac{1+x}{2} \times y + \frac{y}{2} \times (-x-1)$$

$$= \frac{1}{2}(y + xy - yx - y) = 0.$$

Les droites (OI) et (BM') sont donc perpendiculaires et la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' .

On a démontré la propriété 1 : la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' .

e) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on a : $BM'^2 = \overrightarrow{BM'} \cdot \overrightarrow{BM'} = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (x+1)^2$ car $\overrightarrow{BM'}(y; -x-1)$ d'après la question précédente.

$$(2OI)^2 = 2\overrightarrow{OI} \cdot 2\overrightarrow{OI} = 4\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OI} = 4\left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)$$

$$= (1+x)^2 + y^2 \text{ car } \overrightarrow{OI} = \left(\frac{1+x}{2}; \frac{y}{2} \right) \text{ d'après la}$$

question précédente.

On a donc $BM'^2 = (2OI)^2$, d'où $BM' = 2OI$ car les distances sont des valeurs positives.

On a démontré la propriété 2 : $BM' = 2OI$.

Corrigé Asie (juin 2013)

1. La réponse est « Vrai ».

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned} c - a &= 1 + i\sqrt{3} - (2 + 2i) = 1 + i\sqrt{3} - 2 - 2i \\ &= -1 + i(\sqrt{3} - 2) \text{ et} \end{aligned}$$

$$b - a = -\sqrt{3} + i - (2 + 2i) = -(\sqrt{3} + 2) - i.$$

$$\text{Or } (\sqrt{3} + 2)(c - a) = (\sqrt{3} + 2)(-1 + i(\sqrt{3} - 2))$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} + 2) \times i(\sqrt{3} - 2)$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + i(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + i((\sqrt{3})^2 - 2^2)$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + i \times (3 - 4) = -(\sqrt{3} + 2) - i, \text{ donc}$$

$$(\sqrt{3} + 2)(c - a) = b - a \text{ et } (\sqrt{3} + 2)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

2. La réponse est « Faux ».

Montrons que les points B, C et D n'appartiennent pas à un même cercle de centre E.

$$BE^2 = |e - b|^2 = |-1 + (2 + \sqrt{3})i - (-\sqrt{3} + i)|^2$$

$$= |-1 + 2i + \sqrt{3}i + \sqrt{3} - i|^2$$

$$= |\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)|^2$$

$$= (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 8.$$

$$CE^2 = |e - c| = |-1 + (2 + \sqrt{3})i - (1 + i\sqrt{3})|^2$$

$$= |-1 + 2i + \sqrt{3}i - 1 - i\sqrt{3}|^2$$

$$= |-2 + 2i|^2$$

$$= (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8.$$

$$DE^2 = |e - d| = |-1 + (2 + \sqrt{3})i - \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)|^2$$

$$= |-1 + 2i + \sqrt{3}i + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i|^2 = \left|2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^2$$

$$= \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{19 + 8\sqrt{3}}{4} \neq 8.$$

On a $BE^2 = CE^2 = 8$ puis $BE = CE = \sqrt{8}$, car les longueurs sont des valeurs positives, donc les points B et C appartiennent à un même cercle de centre E et de rayon $\sqrt{8}$.

Mais, $DE^2 \neq 8 = CE^2$ donc $DE \neq CE$ et le point D n'appartient pas au cercle de centre E et de rayon $\sqrt{8}$.

Corrigé Polynésie (juin 2013)

1. $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc on a :

$$i \frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} \times \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3})}$$

$$= \sqrt{3}e^{i(\frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12})} = \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}.$$

La réponse est **d**).

2. On pose $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels.

$$-z = \bar{z} \Leftrightarrow -x - iy = x - iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = iy, y \in \mathbb{R}.$$

La réponse est **c**) : L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite. Cette droite est la droite des nombres imaginaires purs.

Géométrie dans l'espace p. 44

Corrigé Amérique du Nord (mai 2013)

1. Pour démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit de démontrer, par exemple, que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Or on a : $\overrightarrow{AB}(1; -1; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; -5; -3)$.

Puisque $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-5}$, les coordonnées des vec-

teurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles ce qui entraîne que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont donc pas alignés.

2. **a)** Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

Pour démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC), il suffit de démontrer que $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC), par exemple les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 3 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + (-5) \times (-1) + (-3) \times 3 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$.

La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC).

b) Les calculs précédents montrent que $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC).

Une équation cartésienne de (ABC) est donc de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.

A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation de ce plan :

$$2 \times 0 - 4 + 3 \times 1 + d = 0 \text{ soit } d = 1.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ .

Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$ et contient le point D $(7; -1; 4)$, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$

d) Puisque le point H est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC), ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le paramètre t vérifie donc :

$$2 \times (2t + 7) - (-t - 1) + 3 \times (3t + 4) + 1 = 0.$$

Ce qui donne $t = -2$, et finalement $H(3; 1; -2)$.

3. **a)** Pour démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants il suffit de démontrer qu'ils ne sont pas parallèles, c'est-à-dire que leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y + z = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1; 1; 1)$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x + 4y + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1; 4; 0)$.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnelles.

Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont donc pas colinéaires et les plans sont sécants.

b) Pour vérifier que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

il suffit de remplacer dans les équations cartésiennes respectives des deux plans, x , y et z par leur expression en fonction de t , on a : $-4t - 2 + t + 3t + 2 = 0$ et $-4t - 2 + 4t + 2 = 0$.

d est bien l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

c) On déduit de la représentation paramétrique précédente que $\vec{u}'(-4; 1; 3)$ est un vecteur directeur la droite d .

$\vec{u}(2; -1; 3)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont donc parallèles.

Corrigé Métropole (sept. 2010)

1. a) Un point appartient à un plan lorsque ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $3x + y - z - 1 = 0$ et le point C a pour coordonnées $(1; 3; 2)$.

On remplace donc x par 1, y par 3 et z par 2 dans l'égalité et on vérifie si elle est vraie ou fausse.

On a : $3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 3 \neq 0$.

Donc le point C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

b) Pour démontrer qu'une droite est incluse dans un plan, on peut montrer que tous les points de la droite appartiennent au plan, il suffit même de démontrer que deux points de la droite appartiennent au plan.

On considère un point $M(-t+1; 2t; -t+2)$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$.

On a :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0.$$

Ce qui est toujours vrai quelle que soit la valeur du réel t .

Donc la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

2. a) Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(-1; 2; -1)$.

Le plan $\mathcal{Q}$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, donc les vecteurs directeurs de la droite $\mathcal{D}$ sont des vecteurs normaux au plan $\mathcal{Q}$.

Une équation du plan $\mathcal{Q}$ est donc de la forme : $-x + 2y - z + d = 0$.

Pour finir de déterminer l'équation du plan $\mathcal{Q}$, il faut déterminer la valeur de d . On sait que le point C appartient au plan $\mathcal{Q}$, les coordonnées du point C doivent vérifier l'équation du plan $\mathcal{Q}$. On a alors :

$$-1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3.$$

Une équation du plan $\mathcal{Q}$ est donc

$$-x + 2y - z - 3 = 0.$$

b) Les coordonnées du point I, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{Q}$ doivent vérifier les équations de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{Q}$.

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} x_1 = -t + 1 \\ y_1 = 2t \\ z_1 = -t + 2 \end{cases} \text{ et } -x_1 + 2y_1 - z_1 - 3 = 0.$$

On a donc $I \in \mathcal{D}$ et :

$$I \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow -(-t+1) + 2 \times 2t - (-t+2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

D'où :

$$x_1 = -1 + 1 = 0; y_1 = 2 \times 1 = 2 \text{ et } z_1 = -1 + 2 = 1.$$

Donc I a pour coordonnées $(0; 2; 1)$.

c) Les coordonnées du vecteur $\vec{CI}$ sont $(x_1 - x_c; y_1 - y_c; z_1 - z_c)$, soit $(-1; -1; -1)$.

On sait que $CI^2 = \vec{CI} \cdot \vec{CI}$, soit

$$CI^2 = (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) = 3$$

$$\text{Donc } CI = \sqrt{3}.$$

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-t+1; 2t; -t+2)$.

a) Quel que soit le réel t , $\vec{CM_t}$ a pour coordonnées $(x_{M_t} - x_c; y_{M_t} - y_c; z_{M_t} - z_c)$, soit $(-t; 2t-3; -t)$.

On sait que $CM_t^2 = \vec{CM_t} \cdot \vec{CM_t}$, soit :

$$CM_t^2 = (-t) \times (-t) + (2t-3) \times (2t-3) + (-t) \times (-t).$$

D'où

$$CM_t^2 = t^2 + 4t^2 - 12t + 9 + t^2 = 6t^2 - 12t + 9.$$

b) On définit la fonction f sur l'ensemble des réels par : $f(t) = 6t^2 - 12t + 9$.

La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur l'ensemble des réels. Sa dérivée f' est définie par $f'(t) = 12t - 12$.

On a :

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1; f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 1 \text{ et}$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 1.$$

Quel que soit le réel t strictement inférieur à 1, la fonction f est strictement décroissante donc : $t < 1 \Leftrightarrow f(t) > f(1)$.

Quel que soit le réel t strictement supérieur à 1, la fonction f est strictement croissante donc : $t > 1 \Leftrightarrow f(t) > f(1)$.

Lorsque $t = 1$, la fonction f admet un minimum égal à $f(1)$.

Par conséquent, quelque soit la valeur de t , on a $f(t) \geq f(1)$.

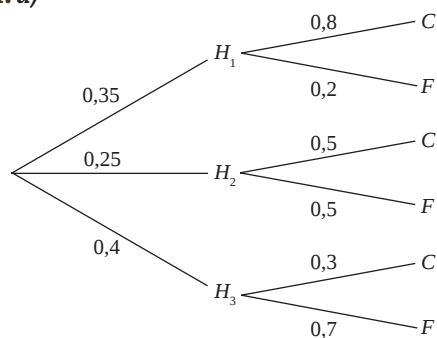
Or lorsque $t = 1$, on a $CM_t = CI = \sqrt{3}$.

Donc CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Probabilités conditionnelles p. 52

Corrigé Métropole
(juin 2013)

1. a)



b) Pour calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, on applique la formule des probabilités composées et on obtient donc :

$$P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3, \text{ soit } P(H_3 \cap C) = 0,12.$$

c) La jardinerie ne se fournissant qu'après des trois horticulteurs, les événements H_1 , H_2 et H_3 forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) \\ &= P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) \\ P(C) &= 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 \\ P(C) &= 0,525. \end{aligned}$$

d) D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533.$$

2. a) On a 10 fois la répétition d'un même événement, avec une probabilité de succès de 0,525, de façon indépendante, donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.

b) Cela revient à calculer $P(X = 5)$, d'où :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5 \approx 0,243.$$

c) L'événement « au moins deux feuillus » est aussi l'événement « au plus 8 conifères », d'événement contraire « 9 ou 10 conifères ». Cela revient à calculer $P(X \leq 8)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \\ P(X \leq 8) &= 1 - \binom{10}{9} \times 0,525^9 \times (1 - 0,525) - 0,525^{10} \approx 0,984. \end{aligned}$$

Corrigé Métropole (juin 2011)

1. a) Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. Donc $P(V) = 0,02$.

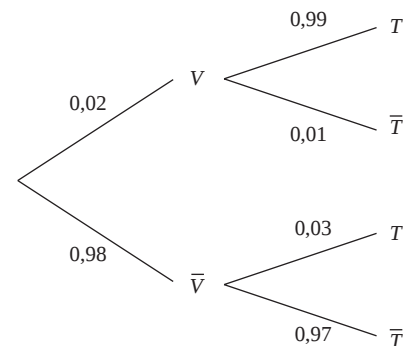
La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99.

$$\text{Donc } P_V(T) = 0,99.$$

La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97.

$$\text{Donc } P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97.$$

D'où l'arbre pondéré :



b) On a $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T)$, d'où $P(V \cap T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

2. On cherche $p(T)$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T), \text{ soit}$$

$$P(T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492.$$

3. a) On cherche à calculer $P_T(V)$.

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4.$$

Il y a environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée si le test est positif.

b) On cherche $P_{\bar{T}}(\bar{V})$.

D'après la formule des probabilités conditionnelles on a :

$$P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \approx 0,999.$$

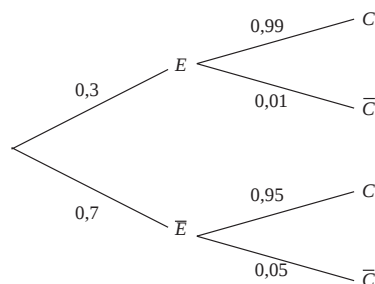
La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est donc d'environ 0,999.

Lois à densité p. 58

Corrigé Liban
(mai 2013)

Partie A

1.

2. La probabilité recherchée est $P(C \cap \bar{E})$.

En appliquant la formule des probabilités conditionnelles, on en déduit donc que :

$$P(C \cap \bar{E}) = P_{\bar{E}}(C) \times P(\bar{E}) = 0,95 \times 0,7 = 0,665.$$

3. Les événements $C \cap E$ et $C \cap \bar{E}$ forment une partition de C .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \cap \bar{E}) + P(C \cap E).$$

$$P(C) = 0,665 + 0,99 \times 0,3 = 0,962.$$

4. La probabilité recherchée est $P_C(E)$.

En appliquant la formule des probabilités conditionnelles on en déduit donc que :

$$P_C(E) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0,99 \times 0,3}{0,962} \approx 0,309 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie B

1. D'après l'énoncé, la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme est égale à :

$$P(0,16 \leq X \leq 0,18).$$

On lit dans le tableau :

$$P(0,16 \leq X \leq 0,18) = 0,9044.$$

2. a) D'après le cours, Y suit une loi normale centrée réduite.b) Si $0,16 \leq Y \leq 0,18$ alors :

$$\frac{0,16 - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{Y - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{0,18 - 0,17}{\sigma_2} \text{ et}$$

$$\frac{-0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}.$$

c) On doit avoir :

$$P\left(\frac{-0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}\right) = 0,99.$$

En utilisant le tableau, on lit :

$$\beta = \frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \text{ d'où } \sigma_2 = \frac{0,01}{2,5758} \approx 0,00385.$$

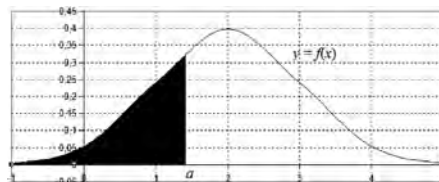
Finalement, à 10^{-3} près, $\sigma_2 \approx 0,004$.

Corrigé sujet inédit

Si une variable aléatoire X suit une loi normale de fonction de densité f , $P(X \leq a)$ mesure l'aire de la surface coloriée. L'aire totale de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1.

On en déduit $P(X > a) + P(X \leq a) = 1$ et

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a).$$



Par ailleurs, pour savoir si un contrôle est conforme, à l'aide d'un intervalle de fluctuation, on vérifie si la valeur trouvée appartient à cet intervalle.

1. a) $P(X > 99) + P(X \leq 99) = 1$,

$$\text{donc } P(X > 99) = 1 - P(X \leq 99).$$

$$\text{Ou encore } P(X > 99) = 1 - 0,01002045 = 0,98997955.$$

D'où $P(X > 99) = 0,99$ au centième près.

$$b) P(99 \leq X \leq 101) = P(X \leq 101) - P(X \leq 99).$$

$$\text{Soit } P(99 \leq X \leq 101) = 0,98997955 -$$

$$0,01002045 = 0,9799591.$$

Donc $P(99 \leq X \leq 101) = 0,98$ au centième près.

c) D'après le résultat précédent, la probabilité que le pot soit non conforme est de $1 - 0,98 = 0,020$.

2. a) Pour $p = 0,98$ et $n = 120$, on obtient :

$$I = \left[0,98 - 1,96 \sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{120}}; 0,98 + 1,96 \sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{120}} \right].$$

Soit $I \approx [0,955; 1,005]$.

b) $\frac{113}{120} \notin I$, donc un nouveau réglage de la chaîne de production est nécessaire.

Corrigé sujet inédit

1. On pose $Z = \frac{Y - 120}{8}$. Z suit alors la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

$$P(Y \geq 104) \text{ équivaut à } P(Y - 120 \geq -16)$$

$$\text{ou } P(Z \geq -2).$$

En utilisant les propriétés de la fonction de répartition, on peut écrire :

$$P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2).$$

On trouve, à l'aide d'une calculatrice, que $P(Z \leq 2) = 0,9772$.

La probabilité que le sachet pèse plus de 104 g est de 0,9772.

2. On effectue le changement de variable vu à la question précédente.

$$P(104 \leq Y \leq 136) = P(-16 \leq Y - 120 \leq 16) = P(-2 \leq Z \leq 2).$$

Les propriétés de la fonction de répartition permettent d'en déduire que :

$$P(104 \leq Y \leq 136) = 2 P(Z \leq 2) - 1.$$

$$\text{Soit } P(104 \leq Y \leq 136) =$$

$$2 \times 0,9772 - 1 \approx 0,9544 = 0,0456.$$

Donc la probabilité que la masse du sachet ne soit pas comprise entre 104 et 136 grammes est de 0,0456.

Échantillonnage

p. 63

Corrigé Amérique du Nord
(mai 2013)

Partie A

1. $P(390 \leq X \leq 410) = P(X \leq 410) - P(X \leq 390)$
 $\approx 0,818 - 0,182 \approx 0,636$ au millième près.
2. Un pain choisi au hasard dans la production est commercialisable si et seulement si son poids est supérieur ou égale à 385 g.
 $P(X \geq 385)$ est l'événement contraire de $P(X < 385)$ et $P(X < 385) = P(X \leq 385)$, donc :
 $P(X \geq 385) = 1 - P(X \leq 385) \approx 1 - 0,086$
 $\approx 0,914$ au millième près.
3. On désigne par Y la variable aléatoire de paramètres $\mu = 400$ et d'écart type σ inconnu.
 On a :
 $P(Y \geq 385) = 0,96$ d'où $1 - P(Y \leq 385) = 0,96$
 et $P(Y \leq 385) = 0,04$.

Or, d'après le cours, on sait que si Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 400$ et σ , alors $Z = \frac{Y - 400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite, et $P(Y \leq 385) = 0,04$ entraîne

$$P\left(Z \leq \frac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0,04.$$

D'après l'énoncé, nous savons que $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$.

On a donc $-\frac{15}{\sigma} = -1,751$ et finalement $\sigma = \frac{15}{1,751} \approx 8,6$.

Si $\sigma = 8,6$, valeur approchée au dixième, la probabilité qu'un pain choisi au hasard soit commercialisable est de 96 %.

Partie B

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 s'écrit :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

avec $p = 0,96$ et $n = 300$.

$$p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\approx 0,96 - 1,96\sqrt{\frac{0,96(1-0,96)}{300}} \approx 0,938$$

au millième près.

$$p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\approx 0,96 + 1,96\sqrt{\frac{0,96(1-0,96)}{300}} \approx 0,982$$

au millième près.

On a donc $I = [0,938 ; 0,982]$ au millième près.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. La fréquence observable de pains commercialisables dans cet échantillon est de $\frac{283}{300} \approx 0,9433$ soit environ 94 % de la production. Puisque $0,94 \in [0,93 ; 0,99]$, on peut décider que l'objectif a été atteint.

Algorithmique
et logique

p. 70

Corrigé Amérique du Nord
(mai 2013)

1. a) Pour $n = 3$, l'algorithme affiche 1,8340 à 10^{-4} près.
 b) Cet algorithme affiche la valeur de u_n .
 c) D'après le tableau, on peut conjecturer que la suite est croissante et convergente vers un nombre proche de 2.
2. a) Montrons par récurrence la propriété $P(n) : 0 < u_n \leq 2$.
Initialisation : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$, $P(0)$ est vraie.

On définit la fonction f sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = \sqrt{2x}$.

On a pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$. f est croissante sur $[0 ; 2]$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } 0 < u_n \leq 2 &\Leftrightarrow 0 < 2u_n \leq 4 \\ &\Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4} \\ &\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.

b) Montrons par récurrence la propriété $Q(n) : u_n \leq u_{n+1}$.

$u_1 = \sqrt{2} \geq u_0 = 1$, $Q(0)$ est vraie.

Si $u_n \leq u_{n+1}$, étant donné que f est croissante, on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

$Q(n+1)$ est vraie.

On en déduit donc, d'après le principe de récurrence, que $u_n \leq u_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que (u_n) est une suite croissante.

c) On vient de prouver que, d'une part, la suite (u_n) est croissante et que, d'autre part, elle est majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. a) Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$$

$$\text{or } u_{n+1} = \sqrt{2u_n}, \text{ donc :}$$

$$v_{n+1} = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln u_n + \ln 2) - \ln 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

De plus, $u_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, donc la suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) On déduit de ce qui précède que pour

tout entier naturel n , $v_n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$v_n = \ln u_n - \ln 2 \Leftrightarrow v_n = \ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}.$$

D'où, pour tout entier n , $u_n = 2e^{-\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

c) Étant donné que $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, donc par composition des limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = 1$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

d) L'algorithme ci-dessous affiche en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher n

Corrigé sujet inédit

Étude de la variable « somme » pour chaque étape :
Au début, la valeur de la variable « somme » est égale à 0.

Première étape :

La valeur de l'itérateur « n » est 1. On ajoute donc $\frac{1}{1}$ à la valeur de « somme » qui correspond mathématiquement au calcul : $0 + \frac{1}{1}$.

Deuxième étape :

La valeur de l'itérateur « n » est de 2. On ajoute donc $\frac{1}{2}$ à la valeur de « somme » qui correspond maintenant au calcul mathématique : $0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$.

Conclusion :

À la fin de l'exécution de l'algorithme, la valeur de la variable « somme » correspond au calcul :

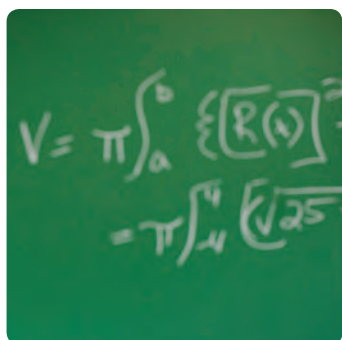
$$0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}.$$

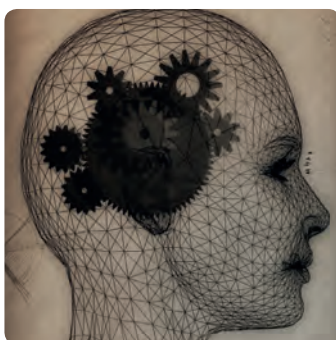
C'est-à-dire la somme des inverses des entiers de 1 à 10.

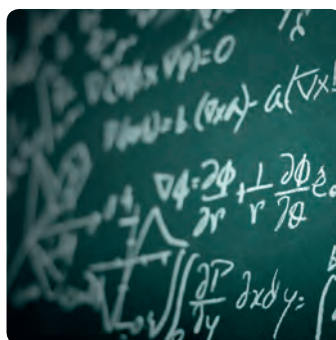
CULTURE SCIENTIFIQUE

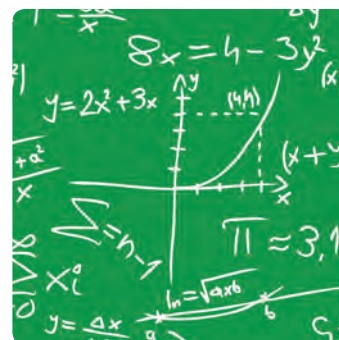
MATHÉMATICIENS CONTEMPORAINS

EMBLÉMATIQUES


$$V = \pi \int_a^b \left(R(x) \right)^2 dx$$
$$= \pi \int_{-4}^4 \left(\sqrt{25-x^2} \right)^2 dx$$




$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$
$$\int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} dx dy = \int_a^b \phi dx$$


$$y = 2x^2 + 3x$$
$$S_x = 4 - 3y^2$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = n-1$$
$$y = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$\ln = \sqrt{a \times b}$$
$$\pi \approx 3,14$$

Alexandre Grothendieck : mort d'un génie des maths

Singulier et véritable mythe, le scientifique naturalisé français s'était retiré du monde en 1990.

Considéré comme le plus grand mathématicien du XX^e siècle, Alexandre Grothendieck est mort, jeudi 13 novembre, à l'hôpital de Saint-Girons (Ariège), non loin de Lasserre, le village où il s'était secrètement retiré au début des années 1990, coupant tout contact avec le monde. Il était âgé de 86 ans. Également connu pour la radicalité de son engagement pacifiste et écologiste, ce mathématicien singulier et mythique laisse une œuvre scientifique considérable.

Il naît le 28 mars 1928 à Berlin, dans une famille atypique. Sascha Schapiro, son père, est russe de confession juive, photographe et militant anarchiste. Également très engagée, Hanka Grothendieck, sa mère, est journaliste. En 1933, Sascha quitte Berlin pour Paris, où il est bientôt rejoint par Hanka. Entre 1934 et 1939, le couple part en Espagne où il s'engage auprès du Front populaire tandis que le petit Alexandre est laissé en Allemagne à un ami de la famille.

Au printemps 1939, Alexandre retrouve ses parents dans le sud de la France. Dès octobre 1940, son père est interné au camp du Vernet. Il en part en 1942 pour être transféré à Drancy puis à Auschwitz, où il sera assassiné. Alexandre et sa mère, eux, sont internés ailleurs. « *La première année de lycée en France, en 1940, j'étais interné avec ma mère au camp de concentration de Rieucros près de Mende*, raconte-t-il dans *Récoltes et Semailles*, un texte autobiographique monumental jamais publié, tiré à 200 exemplaires et qui circule désormais sur Internet. *C'était la guerre, et on était des étrangers – des*

"indésirables", comme on disait. Mais l'administration du camp fermait un œil pour les gosses, tout indésirables qu'ils soient. On entraînait et sortait un peu comme on voulait. J'étais le plus âgé, et le seul à aller au lycée, à quatre ou cinq kilomètres de là, qu'il neige ou qu'il vente, avec des chaussures de fortune qui toujours prenaient l'eau. »

Quatorze problèmes résolus

En 1944, son bac en poche, Alexandre Grothendieck n'a pas encore été identifié par ses professeurs comme le génie qu'il est. Il s'inscrit en mathématiques à l'université de Montpellier puis, à l'orée de la thèse, est recommandé à Laurent Schwartz et Jean Dieudonné. L'histoire, célèbre, a contribué à forger son mythe : les deux grands mathématiciens confient au jeune étudiant une liste de quatorze problèmes qu'ils considèrent comme un vaste programme de travail pour les années à venir, et lui demandent d'en choisir un. Quelques mois plus tard, Alexandre Grothendieck revient voir ses maîtres : il a tout résolu. Dans cette première période de production mathématique, Grothendieck se consacre à l'analyse fonctionnelle, domaine qui étudie les espaces de fonctions. Ses travaux révolutionnent ce champ d'études, mais demeurent moins connus que ceux qu'il conduira dans la deuxième partie de sa carrière.

Dès 1953, le jeune mathématicien se retrouve confronté à la nécessité d'obtenir un poste. Apatriote, il ne peut accéder à la fonction publique et, rétif au service militaire, il ne veut pas

demander la naturalisation française. Il part enseigner à Sao Paulo (Brésil), à Lawrence et à Chicago (États-Unis). Deux ans plus tard, à son retour en France, un riche industriel piqué de mathématiques, Léon Motchane, fasciné par l'intuition et la puissance de travail du jeune homme – il n'a que 27 ans –, décide de fonder un institut de recherche conçu sur le modèle de l'Institut d'études avancées de Princeton : l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette. Le lieu est imaginé pour servir d'écrin au mathématicien, qui va y entamer une deuxième carrière.

Radicalité

Jusqu'en 1970, entouré d'une multitude de talents internationaux, il dirigera son séminaire de géométrie algébrique, qui sera publié sous la forme de dizaines de milliers de pages. Sa nouvelle vision de la géométrie, inspirée par son obsession de repenser la notion d'espace, a bouleversé la manière même de faire des mathématiques. « *Les idées d'Alexandre Grothendieck ont pour ainsi dire pénétré l'inconscient des mathématiciens* », dit Pierre Deligne (Institut des études avancées de Princeton), l'un de ses plus brillants élèves, lauréat de la médaille Fields en 1978 et du prix Abel en 2013.

Les notions qu'il a introduites ou développées sont aujourd'hui encore au cœur de la géométrie algébrique et font l'objet d'intenses recherches. « *Il était unique dans sa façon de penser*, dit M. Deligne, très ému par le décès de son ancien maître. *Il lui fallait comprendre les choses du point de vue le plus général possible et une fois que les choses*

étaient ainsi comprises et posées, le paysage devenait si clair que les démonstrations semblaient presque triviales. »

En 1966, la médaille Fields lui est décernée, mais il la refuse pour des raisons politiques, il ne veut pas se rendre à Moscou pour recevoir son prix. La radicalité avec laquelle il défendra ses convictions ne cessera jamais. Et c'est à partir de la fin des années 1960 qu'il s'éloigne de la communauté scientifique et de ses institutions. En 1970, il fonde avec deux autres mathématiciens – Claude Chevalley et Pierre Samuel – le groupe *Survivre et vivre*, pacifiste, écologiste et très marqué par le mouvement hippie. À la même époque, il découvre que l'IHES est partiellement financé par le ministère de la Défense. Il claqué la porte de l'institut. Il sera naturalisé français l'année suivante. Le Collège de France lui offre alors un poste temporaire, qu'il utilise largement comme tribune politique. Son cours est supprimé. En 1973, il devient professeur à l'université de Montpellier – qui, selon une enquête de *Libération* publiée en juillet 2012, garde encore des milliers de pages inédites du grand mathématicien – avant de rejoindre le CNRS en 1984, jusqu'à sa retraite en 1988. Cette année-là, il reçoit, avec Pierre Deligne, le prix Crafoord, doté d'une forte somme d'argent. Il refuse la distinction et s'en explique dans une lettre adressée au *Monde* et publiée le 4 mai 1988.

Le texte témoigne d'une profonde amertume, d'un divorce avec ses pairs et le projet même de la recherche scientifique. Pourquoi un tel ressentiment ? « *Il n'y a pas de raison unique* »,

dit Pierre Deligne. Le fait que la société ait ignoré ses idées sur l'enjeu écologique n'y est pas étrangère. « *Sur cette question, il avait l'impression que le fait de prouver la réalité des problèmes ferait bouger les choses, comme en mathématiques* », raconte son ancien élève. Ce ne fut pas le cas. En 1990, il quitte son domicile pour une retraite gardée secrète. À ceux avec qui il garde un

contact, il demande que ses écrits non publiés soient tous détruits. Brouillé avec ses proches, sa famille, la science et le monde entier, il s'installe dans un petit village des Pyrénées. Il y restera, coupé de tous, jusqu'à sa mort. ■

Stéphane Foucart
et Philippe Pajot

Le Monde daté du 15.11.2014

LES DATES

- 1928 : Naissance à Berlin.
- 1933 : Ses parents partent pour Paris.
- 1966 : Médaille Fields.
- 1970 : Création du groupe écologiste et pacifiste Survivre et vivre.
- 1990 : Rupture des liens avec le monde.
- 2014 : Mort à Saint-Girons (Ariège).

Le Français Laurent Lafforgue, « Nobel » de mathématiques

À 36 ans, le chercheur de l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) a reçu, le 20 août [2002] à Pékin, la médaille Fields, la plus haute récompense décernée dans cette discipline. Elle couronne également les travaux du Russe installé aux États-Unis Vladimir Voevodsky.

Septième Français à obtenir la récompense suprême en mathématiques depuis 1950, Laurent Lafforgue a reçu, mardi 20 août, la médaille Fields 2002, distinction qui est considérée comme l'équivalent des prix Nobel attribués aux chercheurs dans d'autres disciplines. Il partage ce prix, remis lors du Congrès international des mathématiciens, qui se tient à Pékin du 20 au 28 août, avec le Russe Vladimir Voevodsky, membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton (New Jersey).

Professeur permanent à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette (Essonne) et directeur de recherche au CNRS, Laurent Lafforgue, 36 ans, s'est distingué grâce à ses travaux sur la « correspondance de Langlands ». En 1967, le mathématicien Robert Langlands lançait une série de propositions dont les vérifications alimentent de nombreux programmes de recherche.

Le nouveau lauréat français a obtenu la médaille Fields pour sa publication intitulée *Chtoucas*

de Drinfeld et correspondance de Langlands, et dont le résumé précise qu'elle « *démontre la correspondance de Langlands pour GL_n sur les corps de fonctions* ». À lui seul, ce libellé reflète bien le caractère hermétique des travaux de pointe en mathématiques. La complexité des notions autant que leur degré d'abstraction les mettent hors de portée du *vulgum pecus*. Néanmoins, Laurent Lafforgue ne désespère pas de faire percevoir la beauté des voies explorées par ses pairs au cours des derniers siècles.

L'origine des recherches actuelles remonte à l'élaboration par Leonhard Euler (1707-1783) de la loi de réciprocité quadratique qui stipule que, étant donné deux nombres premiers p et q , il existe un entier x tel que $x^2 - p$ est divisible par q et un entier y , tel que $y^2 - q$ est divisible par p . C'est Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui a démontré le premier, à 19 ans, cette loi, dont la généralisation aux puissances supérieures à 2 n'a été obtenue qu'en 1927 par Emil Artin.

Auparavant, au cours de la seconde moitié du XIX^e siècle, la théorie algébrique des nombres a été progressivement élaborée, essentiellement en Allemagne. De plus en plus générale et abstraite, cette dernière s'appuie sur des notions comme les corps (ensemble d'éléments pouvant s'additionner, se soustraire, se multiplier et se diviser comme les nombres réels), leurs extensions, ainsi que les groupes tels que celui de Galois, issu de la théorie élaborée par Evariste Galois (1811-1832). Entre la fin du XIX^e siècle et 1950 apparaît la théorie des corps de classe, qui s'attaque à la partie commutative (qui rassemble les cas où $ab = ba$) du groupe de Galois. Emil Artin en tire la généralisation de la loi de réciprocité. C'est avec les travaux sur l'extension de la théorie des corps de classe aux cas où le groupe de Galois n'est pas commutatif qu'apparaît le mathématicien canadien Robert Langlands.

Un article de 240 pages

En 1967, à 31 ans, il adresse une lettre de 17 pages à André Weil

(1906-1998), l'un des grands noms de la théorie des nombres, afin d'y exposer ses idées. Largement diffusées, ses hypothèses laissaient entendre que « *les nombres entiers se comportent comme s'ils étaient une courbe* », explique Laurent Lafforgue. Une troublante analogie apparaissait ainsi entre des domaines jusqu'alors distincts. « *Il est alors possible d'établir un véritable dictionnaire dans lequel un nombre premier correspond à un point d'une courbe, une fraction à une fonction définie sur une courbe...* » En reliant la théorie des nombres, l'algèbre et l'analyse, Robert Langlands participe au mouvement d'unification des mathématiques qui se développe des années 1960 aux années 1980. De telles conjectures, c'est-à-dire, en mathématiques, des affirmations non encore démontrées, révélaient un « *grand mystère des mathématiques* » totalement inconnu, mettant en correspondance des familles d'objets jusque-là indépendantes et affirmant que les relations entre leurs objets sont identiques... Peu à

peu, la conjecture de Langlands paraît si lumineuse que dans le monde entier les mathématiciens tentent de la démontrer pour la transformer en théorème. Ils s'attaquent à deux corps : celui des nombres et celui des fonctions. Dans le premier, l'un des grands résultats est obtenu par l'Anglais Andrew Wiles, qui parvient à démontrer en 1994 le fameux théorème de Fermat, élaboré par Pierre de Fermat (1601-1665) en 1637. Cet exploit ne résout qu'un cas particulier dans le corps des nombres, domaine considérablement plus difficile que celui des corps de fonctions. C'est dans ce

dernier que Laurent Lafforgue va s'illustrer en démontrant la correspondance de Langlands avec un grand degré de généralité qui confère à son travail toute sa portée.

Avant lui, l'Ukrainien Vladimir Drinfeld (médaille Fields en 1990) avait effectué, à 20 ans, le même travail pour la valeur $n = 2$. Laurent Lafforgue étend la démonstration pour tout n . En janvier, sa publication finale est éditée par la prestigieuse revue allemande *Inventiones Mathematicae*. Un article de 240 pages en français, alors que les publications habituelles ne

dépassent pas les 40 pages. Au total, avec ses autres articles, Laurent Lafforgue a déjà publié 600 pages. Pour lui, « *la conjecture de Langlands compte parmi les plus belles choses proposées en mathématiques. Les énoncés sont extrêmement simples et tiennent souvent en trois lignes. Que cela puisse être vrai est éblouissant ! Mais il faut des centaines de pages pour démontrer quelques cas très particuliers* ».

Christian Peskine, directeur scientifique adjoint du département sciences physiques et mathématiques du CNRS, qualifie le travail de Laurent

Lafforgue d'« *extraordinaire* ». Pourtant, ses résultats ne bénéficient pas de l'aura qui entoure ceux d'Andrew Wiles, sans doute en partie parce que ce dernier a résolu un problème vieux de plus de trois siècles, alors que les conjectures de Langlands n'ont que trente-cinq ans. Pour autant, Christian Peskine ne cache pas sa joie de voir un nouveau Français décrocher la médaille Fields et y trouve « *une confirmation de la richesse du tissu scientifique français en mathématiques* ». ■

Michel Alberganti

Le Monde daté du 22.08.2002

Science avec conscience

Cédric Villani, 41 ans, mathématicien. Chercheur médaillé et médiatique, il défend une discipline qui apprend à « refuser les idées toutes faites ».

Se méfier, toujours, des apparences. C'est la promesse que l'on se fait après deux heures passées en tête-à-tête avec Cédric Villani, Médaille Fields 2010 de mathématiques. Difficile, pourtant, de ne pas s'arrêter au look de ce romantique, fêru de musique classique et pianiste à ses rares heures creuses, qui cultive son allure de dandy à la Oscar Wilde ou à la Franz Liszt.

Cheveux de jais aux épaules, costume trois pièces rehaussé d'un foulard noué en lavallière, oignon au gousset, boutons de manchette et araignée à la boutonnière, un bijou qu'il fait confectionner par un artisan lyonnais et dont il possède toute une collection. « *Enfant, confie-t-il, j'étais un timide maladif. Pour m'en défendre, j'ai choisi d'attirer le regard.* »

La planète des mathématiciens est, il est vrai, peuplée d'excentriques à la sensibilité exacerbée. Comment, sinon, vagabonder dans les sphères éthérées de la pure abstraction ? Tout de même, à regarder la photographie affichée sur la porte de son bureau

de directeur de l'Institut Henri Poincaré, dans le Quartier latin à Paris – on l'y voit bondissant, à l'image de Nixon, Dali ou Marilyn Monroe saisis par l'objectif de Philippe Halsman –, à siroter le thé vert coréen qu'il vous sert dans un mug à son nom – lui utilise une tasse portant celui de Poincaré –, à le découvrir dans les pages mode de *L'Express*, dans *Paris Match* ou dans *Madame Figaro*, on se dit que cet homme est habité par un besoin de reconnaissance singulier. Et que la médaille Fields, la plus prestigieuse distinction de sa discipline, décernée à des mathématiciens de moins de 40 ans, n'a pas suffi à l'assouvir.

Jugement hâtif. Le chercheur révèle, dès les premiers mots, un naturel affranchi des conventions. Il est lui-même, tout simplement, Cédric, prénom anglo-saxon aux consonances aristocratiques, Villani, patronyme méditerranéen aux origines paysannes. Et cette simplicité est sa suprême élégance. S'il paye de sa personne, sur les plateaux de télévision ou dans l'émission « La Tête au carré » de *France Inter*, dont il

est un chroniqueur régulier, c'est pour transmettre sa passion pour les sciences. Peu de chercheurs autant que lui, qui a donné cette année une vingtaine de conférences grand public, sont d'aussi actifs militants de la cause des mathématiques et, plus largement, de la recherche.

Sa première expérience du petit écran l'a marqué. Invité du « Grand Journal » de Canal+, il s'y est retrouvé aux côtés de Frank Dubosc. Lui qui n'a pas la télévision ignorait tout de l'humoriste. « *Le lendemain, raconte-t-il, des collègues m'ont demandé ce qui m'avait pris d'aller faire le guignol. Mais j'étais ravi. Pour ce qui est de toucher du monde, c'était le pompon ! Même les éboueurs m'arrêtaient dans la rue.* » Le même jour, il participait, plus sérieusement, aux « Mots de minuit » sur France 2...

Ce fils de pieds-noirs aux ascendants napolitain, génois et grec, né à Brive-la-Gaillarde (Corrèze) « *au milieu des vaches et des coquelicots* », sait ce qu'il doit à l'apprentissage des mathématiques. « *Une école*

d'imagination, de persévérance et de rigueur, qualités utiles dans toutes sortes de métiers et de situations », dit-il. Il connaît aussi la dette qu'il a envers le système éducatif français, ses classes préparatoires et ses grandes écoles, qui lui ont donné « *beaucoup de bonheur* ». Il y a fait un parcours brillantissime : 18 de moyenne au baccalauréat avec la note maximale en mathématiques, maths sup et spé à Louis-le-Grand, puis l'École normale supérieure (ENS) de la rue d'Ulm. Il y découvre le cinéma et la musique, anime le club de spectacles, se laisse élire président de l'association des élèves, se consacre à la préparation du bicentenaire de l'école. Au point que son directeur de thèse, Pierre-Louis Lions, Médaille Fields en 1994, le rappelle à l'ordre d'une note manuscrite : « *Il faudrait peut-être se remettre au travail.* » Sa thèse, 450 pages, sera une « *contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas* ». En clair, à l'étude statistique du

comportement des milliards de milliards de particules qui, dans un milieu gazeux, évoluent vers un état de désordre croissant. Ses travaux le mèneront à s'intéresser au transport optimal ou, pour faire simple, au déplacement d'objets au moindre coût énergétique, ces objets pouvant être des étoiles, des électrons, des voitures ou des produits alimentaires. La question, à la croisée des mathématiques et de la physique théorique, s'applique aussi bien à l'astrophysique qu'à la mécanique des fluides ou à la météorologie. Ses deux ouvrages majeurs sur le sujet, *Topics in Optimal Transportation* (American Mathematical Society, 2003) et

Optimal Transport (Springer, 2008), font référence. Dans sa vie scientifique comme dans sa vie personnelle, Cédric Villani dit s'être laissé porter par « le hasard des rencontres », par « la chance » aussi. Il en a tiré la conviction que « les vraies découvertes, celles qui marquent une rupture, ne sont jamais planifiées ». Et que la recherche, que les gouvernements aimeraient canaliser, devrait être « un peu plus libre ». Le chercheur, pense-t-il, est « au centre de la société », même s'il en est un acteur « invisible ». La science, plaide-t-il, est « ce qui fait avancer la société, ce qui change la vie ». Mais lui qui se prête volontiers aux sollicitations des médias

aime aussi « l'humilité » du métier de chercheur, « petit face aux mystères de l'Univers et à des questionnements auxquels il ne peut répondre seul ». Il s'inquiète des mauvais coups portés à l'enseignement des sciences. Avec les Prix Nobel de physique Claude Cohen-Tannoudji et Albert Fert et des centaines de collègues moins connus, il a signé fin 2010, à l'adresse du ministre de l'éducation, Luc Chatel, une pétition. Le texte s'alarmait de la baisse du nombre d'heures allouées aux sciences par la réforme des lycées, alors qu'à ses yeux « il faut plus que jamais mettre le paquet sur les filières scientifiques ». Ces matières développent une discipline intellectuelle où, « à la différence des idéologies », l'esprit apprend à être critique, à « se remettre en question », à « refuser les idées toutes faites ». L'histoire, rappelle-t-il, compte « nombre de mathématiciens engagés, contestataires, prêts

à remettre en cause les régimes trop autoritaires », tels Gaspard Monge, « révolutionnaire enragé », Évariste Galois, « républicain acharné », ou Maurice Audin, « militant anticolonialiste ». Sans craindre de dilapider sa notoriété, c'est ce message d'anticonformisme qu'il porte, devant ses étudiants de l'université Lyon-I comme sur les antennes. Vraiment, ne pas se fier aux apparences. ■

Pierre Le Hir

Le Monde daté du 06.08.2011

PARCOURS

- 1973 : Naissance à Brive-la-Gaillarde
- 1998 : Doctorat sur l'étude statistique des gaz
- 2009 : Directeur de l'Institut Henri-Poincaré
- 2010 : Médaille Fields de mathématiques

Jacques Stern – Briseur de codes

Le père de la cryptologie moderne française reçoit ce vendredi la médaille d'or du CNRS. Pionnier dans la « science du secret » de renommée internationale, il était à l'origine mathématicien.

Avec sa voix douce et son air affable, Jacques Stern cache bien son jeu. Le récipiendaire de la médaille d'or du CNRS 2006, professeur à l'École normale supérieure – dont il dirige le laboratoire d'informatique –, est un démolisseur. Un redoutable briseur de codes. Ce mathématicien de formation, passé tardivement à l'informatique, a fait des ravages dans une discipline longtemps régie par l'empirisme : la cryptologie. Cette « science du secret », dont il a décrit l'histoire et les principes dans un ouvrage limpide, est depuis l'Antiquité un art de la guerre. La cuirasse, c'est la cryptographie, c'est-à-dire le codage

et l'écriture secrète. L'épée, c'est la cryptanalyse, qui vise à briser le code pour accéder au message caché. Jacques Stern excelle dans les deux armes, avec peut-être une prédilection pour la seconde. « Comme un détective, il observe des phénomènes mathématiques isolés et est ensuite capable de les unifier dans une théorie », explique David Naccache, un de ses anciens étudiants passé par Gemplus, le géant de la carte à puce, aujourd'hui revenu à la recherche universitaire. L'élève se souvient avoir vu le maître trouver la brèche d'un système en quelques minutes. Ce qui l'a frappé chez Jacques Stern, c'est sa

disponibilité vis-à-vis des jeunes qu'il lance dans la bataille. « Dans les autres disciplines, on se bat contre la nature. Ici, c'est contre un être humain, qui peut être retors. Il n'y a pas de règle codifiée, note encore David Naccache. Son tableau de chasse est impressionnant. » Fatalement, certains de ses confrères et amis en font les frais. « C'est de bonne guerre », convient Jean-Jacques Quisquater (université de Louvain), dont un protocole fut cassé en 1998 par Jacques Stern et un de ses élèves. Le chercheur belge ne lui en porte pas rancune. Il a accueilli dans son laboratoire l'un des fils de Jacques Stern, Julien, qui a fait

une thèse en cryptologie avant de fonder avec son frère Alexandre une entreprise de conseil et sécurisation des échanges électroniques, Cryptolog. « J'ai peut-être eu le tort d'offrir un ordinateur à Julien pour ses 8 ans », sourit Jacques Stern. Lui-même n'est pas né dans une famille de scientifiques. Ses grands-parents, juifs d'Europe centrale et de Salonique, ont émigré en France à la fin du XIX^e siècle. Installés à Paris, ses parents tenaient un commerce de vêtements. Son père fut prisonnier de guerre, sa mère déportée en Allemagne. « Ils ont souffert, commente le fils, mais n'ont pas perdu confiance

dans le pays que leurs parents avaient choisi, ni dans l'avenir. » L'avenir, c'était lui, enfant unique né dans l'après-guerre, abonné aux prix d'excellence, qu'un prof de maths oriente vers Louis-le-Grand et sa prépa scientifique. Il y gagne le goût pour ce qu'il pressent de la recherche. Mai 68 ? *« J'ai beaucoup discuté, mais je n'étais pas dans la rue. »* Admis à Polytechnique, il préfère rejoindre Normale-Sup (ENS). Après sa thèse sur la théorie mathématique de l'indécidabilité et un an à Berkeley (San Francisco), marié à une juriste spécialiste de droit international, il est bombardé à la chaire de mathématiques de l'université de Caen. Le jeune prof s'épanouit au contact d'étudiants peu nombreux et motivés – un peu le contraire de ce qu'il perçoit de l'université de masse d'aujourd'hui. Mais la vie de mathématicien l'use. *« On produit dans la douleur, on ne peut penser à rien d'autre »,* lâche

cet amateur d'opéra disert, qu'on imagine mal aujourd'hui en génie torturé. À l'époque, une obsession s'impose : créer utile. Après mûre réflexion, ce sera l'informatique, *« cette mécanisation de l'abstraction »,* et en particulier la cryptologie. En maths, sa spécialité – prouver que quelque chose est impossible – n'a *« aucun intérêt pratique »*. Mais en cryptologie, *« si on peut garantir que l'adversaire est dans l'impossibilité d'accéder à des données, la preuve devient utile »,* résume-t-il. Avec la logique, sa spécialité d'origine, il contribue à l'émergence d'une discipline sortie de la clandestinité dans les années 1970, sous l'impulsion de chercheurs, essentiellement anglo-saxons, soucieux de sécuriser les échanges de données. Naissent alors de nouveaux protocoles permettant de signer les messages, de chiffrer les données et de s'assurer de leur intégrité, autant de briques

nécessaires à l'édification du commerce électronique.

En France, le monde académique ignore la discipline. Tout ou presque est à construire. D'abord *« squatteur »* à l'ENS à la fin des années 1980, Jacques Stern ne tarde pas à attirer des thésards, *« brillants »*. *« Il a fait école, c'est le père de la cryptologie française moderne »,* assure David Naccache. Jacques Stern est donc aussi un bâtisseur. Il a lui-même produit des algorithmes de cryptage, qui sont utilisés dans certaines applications en ligne. L'un d'eux, dit à connaissance nulle, permet de reconnaître un secret sans le connaître. Il est aussi l'auteur, seul ou en réunion, de plusieurs schémas de chiffrement à clé publique, sur la petite dizaine existant dans le monde. Le chercheur a aussi contribué à la démocratisation des moyens de cryptologie. *« On les trouve partout, dans tous les ordinateurs »,* note-t-il. En 1999, une loi en a libéré l'usage par les particuliers, après une longue résistance de la défense et de la police, qui voulaient conserver le monopole de cette technologie classée *« arme de guerre de deuxième catégorie »*. L'année précédente, le gouvernement lui avait demandé un rapport, encore secret aujourd'hui, sur le sujet.

« Il avait prôné une libéralisation raisonnable et a été suivi au-delà de ses espérances », révèle le général Jean-Louis Desvignes, qui était alors responsable du Service central pour la sûreté des systèmes d'information, successeur du Service du chiffre.

« Mon chef de laboratoire de cryptologie sortait de ses pattes », lâche encore le général. Dans l'industrie, la défense, l'université, la descendance de Jacques Stern est assurée. Sa renommée internationale est établie. L'homme, à l'allure encore juvénile malgré ses 57 ans, sans un cheveu blanc, n'a pourtant reçu que sur le tard, en 2005, la médaille d'argent du CNRS. Que l'organisme public lui décerne dans la foulée sa médaille d'or le rassure rétrospectivement sur son choix de carrière. Certains de ses camarades de prépa, qui avaient opté pour l'X, ne sont-ils pas devenus capitaines d'industrie, pour certains *« chargés de fusions imminentes »* ? *« Je pensais que la recherche serait la voie la plus passionnante et difficile, mais ces défis-là ne le sont-ils pas tout autant ? »,* s'interroge-t-il. Drame mineur des surdoués, à qui l'excellence peut ouvrir plusieurs portes. ■

Hervé Morin

Le Monde daté du 07.10.2006

PARCOURS

- 1949 : Naissance à Paris.
- 1968 : Admis à l'X, il choisit l'École normale supérieure.
- 1975 : Thèse de doctorat sur la théorie des ensembles.
- 1997 : Parution de *« La Science du secret »* (éd. Odile Jacob).
- 1998 : Auteur d'un rapport confidentiel-défense sur la cryptologie.
- 2006 : Médaille d'or du CNRS.

Artur Avila, les maths pour dynamique

Ce spécialiste franco-brésilien des systèmes dynamiques a reçu la médaille Fields. Rencontre avec ce génie en perpétuel mouvement.

« **A**rtur est un phénomène », a lancé Étienne Ghys, directeur de recherche CNRS à l'École normale supérieure de Lyon, lors de son exposé louant les mérites de son collègue qui a reçu, le 13 août, au Congrès international des mathématiciens de Séoul, la récompense suprême en maths, la médaille Fields.

Quelques jours plus tôt, à Paris, le « phénomène » Artur Avila, un Franco-Brésilien de 35 ans, était à l'université Pierre-et-Marie-Curie, l'un des deux endroits, avec l'université Paris-VII, où il occupe son mi-temps « français ». L'autre, « brésilien », étant situé à Rio, à l'Institut de mathématiques pures et appliquées, pépite sud-américaine pour les maths.

« Ça ne vous dérange pas si on parle en marchant ? » L'invitation déconcerte mais ne se refuse pas, même si la prise de notes est acrobatique. En route.

Faux départ. Le photographe d'un journal brésilien a besoin de compléter une série de photos sur les quais de la Seine. Tee-shirt et pantalon noirs, le futur lauréat sourit. Mais quand il s'est mis torse nu, les passants ont dû le prendre pour un mannequin de mode, pas pour un génie des maths.

À l'aise, la nouvelle vedette de sa discipline se rhabille et se met en marche. Son parcours brillant défile. Médaille d'or aux Olympiades internationales de mathématiques à 16 ans, thèse à 21 ans (en général on l'obtient à plus de 25 ans). Chargé de recherche au CNRS à 24 ans, puis directeur de recherche, l'échelon suivant, seulement cinq ans plus tard.

Petite pause sur le chemin. Il regarde sa montre. « C'est l'heure. » Il ouvre son sac et grignote une barre de céréales. Avec une heure de musculation par jour, il a besoin de boissons

ou d'aliments protéinés comme en-cas. Surtout à Paris, où il doit rencontrer beaucoup de monde. Au Brésil, il est plus tranquille. « Je travaille beaucoup dans ma tête, en marchant ou à la plage, avoue ce natif de Rio, français depuis 2013. J'aime le bruit de la mer. »

Nouvelle pause, près de la place de la Bastille. Coup d'œil à sa montre. « Je cherche un bar pour l'happy hour », explique-t-il, s'installant en terrasse, comme il confie le faire avec plaisir, accompagné de collègues. Enfin une table pour poser le cahier et comprendre le cœur de son travail. Absorbant une gorgée de mojito, il entame avec plaisir une introduction simple à sa spécialité, les systèmes dynamiques. Un concept qui colle bien à ce premier contact mouvementé... « Deux planètes tournant autour d'une étoile constituent le système dynamique le plus simple à exposer. Mais c'est déjà très compliqué à résoudre. On essaie, en fait, de comprendre sur le long terme l'évolution de ces systèmes évoluant au cours du temps », indique Artur Avila. « D'une façon générale, deux types de comportements apparaissent. Des réguliers et des chaotiques. Nous cherchons à savoir où se trouvent les limites entre les deux », ajoute Jean-Christophe Yoccoz, professeur au Collège de France, Médaille Fields 1994, qui a accueilli son plus jeune collègue en postdoctorat. « Artur est très fort. Il a résolu plusieurs questions ouvertes et difficiles dans les systèmes dynamiques », indique le chercheur.

Artur Avila met donc un peu d'ordre dans le chaos. Ce fut le cas sur des situations d'allure « simple » comme le mélange de cartes, des trajectoires de boules sur des billards non

rectangulaires, ou les voyages de particules quantiques sur des terrains accidentés... Pour montrer dans quelles conditions ces situations restaient « tranquilles » ou au contraire irrégulières, il n'était pas tout seul. « Artur est aussi étonnant par sa capacité à collaborer avec beaucoup de monde », constate Étienne Ghys, qui, lors du congrès, a fait défiler les photos de pas moins de 37 coauteurs ! « Je travaille beaucoup par mail ou chat », affirme le chercheur mondialisé.

« Artur aime aussi rencontrer les gens, parler et écouter », ajoute Jean-Christophe Yoccoz. « Je lis peu avant d'attaquer un problème. Je préfère être assez ignorant au départ afin de développer ma propre intuition », décrit Artur Avila. « Il est doté d'une très grande intuition, en particulier géométrique. Souvent, un argument d'apparence simple lui permet d'aller au-delà de ce que l'on savait faire auparavant, même si la mise en œuvre technique peut s'avérer assez compliquée. Cela donne à ceux qui travaillent avec lui une impression de simplicité et de facilité », témoigne un de ses collaborateurs, Raphaël Krikorian, professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie.

Le premier mojito est fini. Un second arrive. « J'ai l'image d'un "résolveur" de problèmes. Mais j'ai aussi posé de nouvelles problématiques. En fait, les mathématiciens créent leurs propres problèmes en voulant mettre de l'ordre dans les sujets », estime Artur Avila, à l'aise visiblement dans le mouvement perpétuel. « Trouver des solutions prend du temps. Le déclic peut arriver pendant la nuit, parfois sur un problème qu'on avait laissé de côté. On identifie un petit truc. Des choses s'assemblent par hasard. C'est le point de départ », décrit le chercheur. « Ensuite, le travail

est intense. Et, quand on estime avoir fini, on essaie nous-mêmes de détruire notre propre résultat pour y trouver des failles. Avant de le communiquer aux autres », précise-t-il.

Le deuxième mojito est avalé. « Je suis venu en France pour la grande qualité de ses maths et surtout pour la large communauté qui y travaille. J'ai élargi mes domaines d'activité », insiste le chercheur. « Cette concentration française attire, et l'ensemble se renforce automatiquement. Mais cela peut se perdre », alerte-t-il, regrettant les difficultés de carrière pour les jeunes.

Quelques jours plus tard, après le congrès, il est soulagé d'en avoir, en partie, fini avec les obligations protocolaires. « C'était assez stressant. Il y avait beaucoup de sollicitations. Les lycéens voulaient des autographes, des selfies. J'étais content, mais ils étaient très nombreux ! », s'amuse celui qui n'avait pas un très bon souvenir du congrès précédent, en 2010, où son nom circulait déjà pour une médaille. « J'étais stressé pour préparer ma conférence. Un cauchemar. Je me suis dit que plus jamais je ne me ferais aussi mal pour un exposé. Cette année, j'étais plus détendu », confie-t-il.

La médaille Fields va-t-elle changer quelque chose pour lui ? « Ça m'enlève un peu de pression. Je ne suis plus obligé de trouver quelque chose qui soit digne de cet honneur ! », sourit le lauréat, dont la motivation reste évidemment intacte. À Séoul, Étienne Ghys conclut son hommage par : « Ses résultats sont fantastiques, et ce n'est que le début ! » ■

David Larousserie
Le Monde daté du 03.09.2014

Benoît Mandelbrot, père de la géométrie fractale

Des motifs conservant la même allure à des échelles différentes : telle est la particularité des objets fractaux, omniprésents dans la nature. La « science du rugueux » qui les décrit est aussi féconde en économie et dans les sciences humaines.

Né en Pologne le 20 novembre 1924, le mathématicien Benoît Mandelbrot s'est éteint aux États-Unis le 14 octobre 2010. Pionnier de l'utilisation de l'informatique pour la visualisation et l'expérimentation des mathématiques, il est le premier à avoir mis en avant la notion d'objet fractal, qu'il a popularisée dans des livres. De quoi s'agit-il ? Tout simplement d'un objet qui est invariant par changement d'échelle : vous pouvez zoomer tant que vous voulez sur une figure fractale, elle aura toujours la même allure. Dans le texte qui suit, extrait d'un entretien recueilli en 2008 pour mon livre *Parcours de mathématiciens* (Éditions du Cavalier bleu, 2011), Benoît Mandelbrot raconte comment il en est venu à s'intéresser à ces objets que l'on retrouve si souvent dans la nature.

« Le pari d'IBM a été d'embaucher, en 1958, un électron libre tel que moi avec ses idées un peu iconoclastes. En tant qu'ingénieur, j'avais un travail pratique à réaliser dont je me débarrassais assez vite pour me consacrer à mes réflexions. J'étais très libre et le pari a payé car c'est durant les deux premières années à IBM que j'ai fait deux de mes découvertes les plus importantes, l'une en économie et l'autre en physique. Beaucoup plus tard, j'ai lié ces découvertes aux fractales, mais je n'avais pas encore identifié

ce phénomène que l'on retrouve partout dans la nature.

L'économie n'est pas une discipline dans laquelle j'aurais pensé apporter une quelconque contribution en tant que chercheur. Mais, ayant travaillé sur la loi de Zipf durant ma thèse, je voyais que cette loi de distribution des mots dans un texte pouvait être considérée comme une version discrète d'une loi continue bien connue en économie, suivant laquelle environ 80 % des effets sont le produit de 20 % des causes. Cette « loi », bien qu'empirique, a été formalisée par la distribution mathématique de Pareto. Je commençais à avoir épuisé le sujet lorsque je rendis visite à l'économiste Hendrik Houthakker, à Harvard, et découvris sur son tableau un diagramme que j'avais déjà rencontré dans l'étude de la distribution des revenus. En fait, me dit-il, ce diagramme montrait la variation des marchés boursiers. J'ai commencé par être fasciné par ce sujet et j'ai vite observé que la structure générale des courbes décrivant ces variations était semblable, quelle que soit la période d'observation : une semaine, six mois ou dix ans. Autrement dit, j'ai montré que ces courbes présentaient une invariance d'échelle. [...]

En physique, IBM était confronté à un problème pratique, à savoir le bruit sur les liaisons téléphoniques qui étaient en train d'être établies

entre ordinateurs. J'ai montré que ce bruit avait une structure particulière. Pour le mettre en évidence, j'ai fait appel à une notion (introduite en 1918) que j'allais appeler plus tard la dimension fractale [...]. Non seulement cette dimension était utile à la compréhension du bruit, mais elle s'appliquait aussi à la turbulence, ou à la répartition des amas de galaxies dans l'Univers. [...]

Après cela, je suis revenu sur des travaux anciens de Gaston Julia (1893-1978), qui avait été un de mes enseignants à Polytechnique, et de Pierre Fatou (1878-1929). Entre 1917 et 1919, ces deux mathématiciens français avaient produit les idées fondatrices concernant l'itération des fractions rationnelles. Ces résultats avaient été très remarqués à l'époque, mais personne n'était parvenu à dépasser ces textes fondateurs très arides.

Quand j'étais étudiant à Polytechnique, mon oncle mathématicien, pour qui ces théories de Julia et de Fatou étaient une marotte, me poussait sans cesse à reprendre leurs théories sur le plan des mathématiques pures. Pour ma part, je ne voyais pas à l'époque pourquoi elles l'excitaient autant. Mathématiquement, des ensembles issus des itérations sont extrêmement compliqués. C'est alors que je me suis dit : pourquoi ne pas mettre à profit l'outil informatique dont je disposais à IBM

pour tenter de représenter les ensembles de Julia et de Fatou ? Lorsque les dessins de ces ensembles de Julia et Fatou sont apparus pour la première fois sur mon écran d'ordinateur, j'ai été frappé, non seulement par leur insondable complexité, mais aussi par leur extraordinaire beauté. Ils me semblaient à la fois totalement étranges et familiers, comme si je les avais toujours connus. En continuant à jouer sur la représentation des itérations, j'ai conçu et construit d'autres ensembles, dont celui qui porte aujourd'hui mon nom. Mon idée n'était pas de démontrer des choses, mais de poser des questions, d'émettre des conjectures. Par exemple, j'ai conjecturé en 1982 que, pour la trajectoire aléatoire brownienne plane, la dimension fractale de la frontière était égale à $4/3$, conjecture démontrée par Wendelin Werner [*médaille Fields 2006*] et ses collègues des années plus tard. Aujourd'hui les fractales et leurs dérivés sont devenus un immense domaine des mathématiques, si vaste que je n'essaie même plus de suivre les thèses qui sortent chaque année sur le sujet. À près de 85 ans, je suis fier d'avoir pu contribuer à développer cette nouvelle science, que j'aime appeler la « science du rugueux ». » ■

Philippe Pajot

Le Monde daté du 22.05.2013

Jean-Pierre Bourguignon, les maths sans frontières

Le mathématicien part à la retraite après un engagement total pour sa discipline et sa vulgarisation.

« Jean-Pierre est un phénomène quantique : beaucoup d'énergie et d'impulsion, et complètement délocalisé ! », a ironisé le physicien Nikita Nekrasov, le 1^{er} juillet, lors de la cérémonie de départ de son directeur, le mathématicien Jean-Pierre Bourguignon. Il illustrait ainsi l'incroyable bougeotte de son collègue, qui a dirigé pendant dix-neuf ans, un record, l'Institut des hautes études scientifiques (IHES), à Bures-sur-Yvette (Essonne). C'est qu'il en a fallu des voyages pour inviter ou recruter les meilleurs chercheurs du monde entier, ou pour trouver des fonds, ou encore développer le rayonnement de cet établissement atypique, mi-public mi-privé, créé en 1958 et souvent comparé à Princeton, aux États-Unis. « J'ai dû passer pas loin de mille fois par l'aéroport de Roissy pendant cette période », a précisé ce jour-là ce directeur sans frontières, dont beaucoup de collègues témoignent avoir reçu des mails depuis des lieux et à des heures inhabituels. L'agitation est moindre, mi-août, dans son bureau désormais vide. Mais le jeune retraité, né en 1947, qui quittera le CNRS au même moment que l'IHES, a déjà en tête ses cours à donner à l'université Stanford (États-Unis) jusqu'à la fin de l'année. Côté science, il est aussi sans frontières. « Il ne faut pas réduire l'IHES aux maths. Il y a aussi de la physique théorique, de la biologie et de la haute technologie », rappelle celui qui a beaucoup contribué à cette ouverture. « L'avenir des maths est aussi dans la recherche autour des interfaces entre disciplines, et pas seulement dans l'approfondissement

des domaines propres aux mathématiques », insiste-t-il. Et de citer avec gourmandise tel astrophysicien collaborant avec un biologiste et un mathématicien sur le vieillissement cellulaire, ou tel physicien discutant avec un matheux pour résoudre des problèmes de physiologie cardiaque... Cette diversité insufflée à l'IHES était déjà chez ce curieux de nature. « Au départ j'étais attiré par la mécanique, et pas par les maths. Lorsque plus tard j'ai voyagé, je demandais toujours à visiter des usines alentour », se souvient Jean-Pierre Bourguignon, qui a aussi rempli bien des fonctions. Recruté jeune, avant sa thèse, au CNRS, il devient assez vite président de commission pour le recrutement – il sera aussi président du comité d'éthique de l'organisme de 2007 à 2011. Il a présidé la Société mathématique de France (SMF, 1990-1992), mais aussi son équivalent européen (1995-1998), à la création de laquelle il a même assisté, en 1990. Il a enseigné la géométrie différentielle à l'École polytechnique de 1984 à 2012. Lorsqu'il détaille ce parcours, avec une mémoire impressionnante des noms et des dates, il donne à chaque fois l'impression d'y avoir été un peu par hasard. « Je n'étais pas le premier choix », « Je ne sais pas comment ils ont trouvé mon nom »... « Jean-Pierre est une forte personnalité, mais il est franc et honnête. Il n'a pas l'esprit retors et n'est pas prétentieux. Il n'agit pas pour le profit qu'il pourrait en tirer », témoigne Jean-François Mela, mathématicien et ancien président de la SMF et de l'université Paris-XIII.

La communauté des maths lui doit beaucoup. À la fin des années 1980, les maths françaises souffrent de moyens et de recrutements en baisse. Il lance alors en 1987, avec d'autres, mais contre une partie de la communauté, un colloque, « Mathématiques à venir », avec le soutien d'industriels, à destination d'un large public. « Parler d'impact social des maths apparaissait comme une trahison à certains », se souvient Jean-François Mela. Ce fut le succès. « Les financements ont doublé », rappelle Jean-Pierre Bourguignon, qui se souvient encore des huit pages dans *Libération* relatant l'événement. Même succès à l'IHES, qu'il a considérablement transformé. « Notre entente n'était pas forcément acquise », se souvient Philippe Lagayette, actuel président du conseil d'administration de l'IHES mais surtout banquier. Le matheux, qui, élève en 1968 à l'École polytechnique, était parmi les leaders d'une rébellion des élèves contre l'organisation de l'enseignement, s'est mué en chef d'une petite entreprise. « Il avait un instinct naturel pour ça. Il aime bien expliquer et avait déjà un grand réseau international. Il est très travailleur et a un bon contact humain », reconnaît Philippe Lagayette, heureux finalement de la collaboration. Schlumberger, Axa, Saint-Gobain, la Société générale... et des donateurs privés ont répondu à l'entrain du directeur et financent l'IHES.

« Jean-Pierre a compris tôt l'importance des questions de communication et de relations avec le monde industriel. Au départ, ça passait un peu

mal dans la communauté, mais chacun constate les avantages aujourd'hui », constate Cédric Villani, Médaille Fields 2010 et président de l'Institut Henri Poincaré. On mesure le chemin parcouru en rappelant qu'en 1970, la vedette de l'IHES, Alexander Grothendieck, claquait la porte à cause d'un financement de l'IHES en partie lié à la défense... « Jean-Pierre est tout dévoué à son affaire. Le réalisateur Olivier Peyon, avec qui nous avons travaillé pour un documentaire, dit que c'est un "samouraï des maths". Quand il a une mission à accomplir, rien ne peut l'en dévier », souligne Cédric Villani, qui évoque même un « sens du sacrifice ».

Jean-Pierre Bourguignon a donc beaucoup travaillé pour la science, pour son financement, pour son organisation (il était encore rapporteur en Ile-de-France des Assises de la recherche fin 2012), mais aussi pour sa vulgarisation. À divers titres, il est intervenu dans six films de popularisation de sa discipline sur les ondes, la géométrie, l'espace... Il a défendu l'exposition à succès « Les Déchiffreurs », présentant de beaux portraits de mathématiciens. Et en octobre sortira chez Dunod une réédition de textes d'un de ses maîtres scientifiques, Henri Poincaré, qu'il « connaît par cœur » et dont il a rédigé l'introduction. La retraite n'a sonné qu'officiellement. De nouvelles missions l'attendent sûrement. ■

David Larousserie

Le Monde daté du 04.09.2013

Laure Saint-Raymond

Succès et maths

La discrète scientifique de 39 ans, benjamine de l'Académie des sciences, est l'une des plus brillantes de sa génération.

Un jour, en classe de première, Laure Saint-Raymond a obtenu la note de 14 sur 20 à un devoir de mathématiques. Le visage marqué par la stupeur et l'incrédulité, le professeur – un polytechnicien qui avait choisi l'enseignement – lui rendit sa copie en confessant ne pas comprendre ce qui avait pu se produire. L'événement fut si exceptionnel qu'il demeura imprimé dans la mémoire de ses camarades de classe (parmi lesquels l'auteur de ces lignes) : jamais l'intéressée n'avait connu un écart aussi extravagant avec la note maximale. Personne, d'ailleurs, n'avait jamais pensé que ce fût un jour possible.

Cette minuscule entorse à la perfection n'a pas dû se reproduire souvent dans la carrière de Laure Saint-Raymond. Une vingtaine d'années plus tard, elle est, à 39 ans, reconnue par ses pairs comme une des mathématiciennes les plus brillantes de sa génération. Normalienne et d'abord recrutée par le Centre national de la recherche scientifique, elle est nommée professeure à l'université Pierre-et-Marie-Curie, à 26 ans, âge où le commun des mortels peut espérer soutenir une thèse. Elle est, depuis 2007, directrice adjointe du département mathématiques et applications de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, à Paris. Elle est aussi la benjamine de l'Académie des sciences, élue, fin 2013, à l'âge de 38 ans.

Malgré ce qui ressemble bien à une sorte de prédestination (ses parents enseignent les mathématiques), Laure Saint-Raymond n'a choisi que tardivement la voie

des maths. *« Je me suis finalement décidée le jour où je me suis lancée dans ma thèse, mais j'ai longtemps pensé à faire plutôt carrière dans la musique »*, dit-elle.

Au lycée, elle venait parfois avec son violoncelle. L'étui était presque aussi grand qu'elle. Ses camarades la harcelaient copieusement pour qu'elle accepte de jouer, au beau milieu de la cour. Par pudeur peut-être, elle refusait obstinément, et n'a cédé qu'une seule fois, pour exécuter les premières mesures d'une suite de Jean-Sébastien Bach qui ont suffi à persuader son auditoire qu'elle était certainement aussi douée avec un violoncelle que devant une équation. *« J'ai eu le bonheur de jouer une fois avec elle, raconte le mathématicien Jean-Yves Chemin (université Pierre-et-Marie-Curie), qui fut aussi l'un de ses professeurs. Je puis vous dire qu'elle est une musicienne merveilleuse. »*

Le domaine de recherche de Laure Saint-Raymond est un monde où se chevauchent les mathématiques et les sciences de la matière. Où les lois de la nature s'incarnent dans de cabalistiques équations qui deviennent, en elles-mêmes, des objets mathématiques pourvus d'une vie autonome, et dont les propriétés racontent les réalités cachées du monde physique. L'une de ses contributions récentes, conduite notamment avec le mathématicien François Golse (École polytechnique), a été de chercher à retrouver, à partir des lois régissant le mouvement individuel de particules microscopiques, les équations qui décrivent l'écoulement d'un fluide macroscopique.

L'exercice peut sembler parfaitement abscons au béotien, mais il nargue les matheux depuis un certain temps. En 1900, au Congrès international des mathématiciens, l'Allemand David Hilbert (1862-1943) déclarait déjà qu'il fallait chercher *« des méthodes fondées sur l'idée de passage à la limite qui, de la conception atomique, nous conduisent aux lois du mouvement des milieux continus »*...

Avec la mathématicienne Isabelle Gallagher (université Paris-Diderot-Paris-VII), Laure Saint-Raymond s'est penchée sur des problèmes en apparence plus terre à terre, mais tout aussi diaboliquement difficiles. *« Isabelle et Laure ont travaillé sur des modèles de circulation océanique, sur la difficulté à y intégrer la force de Coriolis [créée par la rotation de la Terre], dit Jean-Yves Chemin. Auparavant, nous étions capables de décrire les choses aux latitudes moyennes ; elles sont parvenues à traiter mathématiquement ce qui se produit au voisinage de l'équateur. Le travail qu'elles ont mené sur ce sujet est magnifique. »*

Comment une femme jeune perce-t-elle dans un monde plutôt dominé par des hommes âgés ? La chance des mathématiciennes est peut-être qu'elles naviguent dans une discipline où l'esbroufe n'est pas possible. *« Je n'ai jamais ressenti la moindre discrimination », dit-elle. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de problèmes : en maths, nous sommes loin de la parité. À Normale, nous étions six filles sur les quarante étudiants de ma promotion et c'était, de ce point de vue, une situation plutôt*

exceptionnelle. Ces dernières années, il y a plutôt une ou deux filles par promotion, guère plus. » Pourtant, elle ne mâche pas ses critiques devant certaines mesures prises pour favoriser l'accès des femmes aux mathématiques. Un jour, à la cérémonie de remise d'un prix scientifique, un ministre explique qu'il va imposer la parité aux comités de sélection – pensant peut-être que ces comités fonctionnent sur un modèle simple où les hommes choisissent des hommes et les femmes, des femmes. *« Je lui ai dit que c'était la mesure la plus contre-productive qu'il était possible de prendre, dit-elle. Puisque les mathématiciennes sont déjà peu nombreuses, elles auront une probabilité plus forte d'être contraintes de participer à ces comités et c'est autant de temps qu'elles n'auront pas pour faire des maths, pour travailler, pour avancer. »* Pour être reconnues, en somme. Car, dans les sciences en général et dans les mathématiques en particulier, la reconnaissance ne vient qu'avec les publications.

Le ministre en fut un peu vexé. Discrète et peu attirée par les feux de la rampe, la mathématicienne n'en a pas moins un caractère bien trempé, et une franchise parfois un peu abrupte. *« Il est vrai que j'ai un peu de mal à ne pas dire ce que je pense »,* confesse-t-elle. Mais, après tout, ce petit travers est aussi une qualité. ■

Stéphane Foucart

Le Monde daté du 14.08.2014

LE GUIDE PRATIQUE



DÉROULEMENT DE L'ÉPREUVE

- Durée : 4 heures.
- Coefficient : 7 (ou 9 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité).

Objectifs de l'épreuve

L'épreuve est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme de la série S :

- acquérir des connaissances et les organiser ;
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit.

Nature du sujet

Le sujet comporte trois à cinq exercices indépendants les uns des autres, notés chacun sur 3 à 10 points ; ils abordent une grande variété de domaines du programme de mathématiques de la série S.

Le sujet proposé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité diffère de celui proposé aux candidats ne l'ayant pas suivi par l'un de ces exercices, noté sur 5 points. Cet exercice peut porter sur la totalité du programme (enseignement obligatoire et de spécialité).

Le sujet portera clairement la mention « obligatoire » ou « spécialité ».

Calculatrices et formulaires

La maîtrise de l'usage des calculatrices est un objectif important pour la formation des élèves. L'emploi de ce matériel est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur. Il est ainsi précisé qu'il appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider si l'usage des calculatrices est autorisé ou non lors de l'épreuve. Ce point doit être précisé en tête des sujets.

Il n'est pas prévu de formulaire officiel. En revanche, les concepteurs de sujets pourront inclure certaines formules dans le corps du sujet ou en annexe en fonction de la nature des questions.

Méthodologie et conseils



Conseils de révision

Un mois avant l'épreuve

Le temps

Pour bien réviser, il est important d'établir un planning et de le respecter. Fixez-vous des rendez-vous avec les révisions de mathématiques régulièrement, par exemple une heure tous les jours.

Le contenu

On peut dégager 7 grands axes du programme :

- les suites ;
- les fonctions ;
- l'intégration ;
- les nombres complexes ;
- la géométrie dans l'espace ;
- les probabilités conditionnelles ;
- les lois continues et l'échantillonnage.

Pour chaque axe vous pouvez fixer le nombre de plages de révision en fonction des heures dont vous disposez.

Attention : le thème des fonctions est long et il occupe une place centrale dans les épreuves. Il regroupe : le calcul de dérivées, les limites, les fonctions particulières (logarithme, exponentielle, cosinus et sinus). Pour les autres thèmes, il est préférable de ne pas faire d'impasse.

À partir de ce contenu, deux approches sont possibles :
– réviser entièrement un thème puis passer à un autre et faire des révisions spiralées ;
– découper chaque thème et construire le programme en alternant les thèmes.

La construction d'un planning avec une révision spiralée permet de reprendre tout le programme.

Une semaine avant l'épreuve

Il faut absolument éviter les nuits blanches passées à réviser intensément, vous risquez d'accumuler de la fatigue et d'être totalement épuisé pour les épreuves. Il est préférable de faire un planning par tranches de 2 heures : alterner les phases de travail, de détente (sport, balade) et les repas.

La veille de l'épreuve

Rassurez-vous en relisant vos fiches et en revoyant certains exercices types. Sachez vous interrompre et alternez avec des pauses afin de ne pas saturer. Évitez absolument de faire une nuit blanche.

Enfin, à la veille d'une épreuve, il est normal d'avoir le sentiment de ne rien savoir, mais ce n'est qu'une impression !

Le point sur l'épreuve écrite

Gestion du temps, lecture de l'énoncé

Analyser l'énoncé

Avant de commencer, comptez le nombre de pages du sujet, il doit être conforme à ce qui est indiqué. Effectuez deux lectures de l'énoncé : une globale pour découvrir les parties du cours utilisées, la seconde pas à pas, en décryptant l'énoncé et en notant au brouillon vos idées.

Comprendre le déroulement des questions

- Les **questions** d'un exercice ou d'un problème sont souvent **liées les unes aux autres**.

Pensez en particulier qu'une question commençant par « En déduire que... » doit s'appuyer sur le résultat de la question précédente.

- Repérez si l'une des questions ne donne pas la réponse à une question située plus haut dans le texte.
- Il arrive aussi fréquemment que, dans la partie A, on demande d'étudier une fonction f et que, dans la partie B, on demande d'étudier une fonction g en utilisant les résultats de la partie A : le signe de g' dépend de celui de f .

Résolution des exercices

Utiliser les bonnes méthodes

- Si **vous n'arrivez pas à traiter une question**, ne vous obstinez pas. Vous risquez de vous énerver et de faire des erreurs dans les questions qui suivent. Laissez donc un espace et continuez, en supposant le résultat acquis.

• Si, en répondant à une question, vous trouvez un résultat qui vous est demandé dans une question suivante, c'est que vous n'avez pas fait appel à la bonne méthode.

Ainsi, si pour prouver que $f(x)$ est supérieur à 3, vous êtes amené à calculer $f'(x)$ alors que ceci est demandé plus loin, vous pouvez revoir votre copie.

• **Vérifiez que le texte n'impose pas une méthode.**

Ainsi, si on vous demande de démontrer une inégalité par récurrence, utilisez un raisonnement par récurrence, même s'il existe une méthode plus rapide.

• Quand vous appliquez un **théorème**, vérifiez que les **hypothèses** sont réunies. De même, vous devez adapter une formule en fonction des données de l'énoncé.

Effectuer les calculs

• Attention, une calculatrice, si perfectionnée soit-elle, ne vous dispense en rien de justifier vos résultats.

Sauf si c'est mentionné dans l'énoncé, un raisonnement ne peut s'appuyer sur une phrase du type : « D'après la calculatrice, on obtient... »

• Vérifiez que vos **résultats** sont **vraisemblables** : une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, une aire est un nombre positif, une fonction numérique ne peut croître vers moins l'infini, etc.

• Effectuez les calculs au brouillon mais rédigez directement sur la copie. Sinon vous risquez de manquer de temps.

Les exercices plus difficiles

• On trouve parfois dans la consigne le texte : « Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera



prise en compte dans l'évaluation ». Il s'agit souvent d'exercices plus difficiles, vous pouvez les faire à la fin. Même si vous ne trouvez pas le résultat mais que vous avez une piste, vous pouvez l'écrire.

Rédaction et présentation de la copie

Soigner la rédaction

• L'un des critères d'évaluation de votre copie est la **qualité de la rédaction**.

N'oubliez donc pas d'expliquer clairement votre raisonnement.

• Pensez à **justifier** vos constructions.

Dans le cas d'une fonction, établissez un tableau de valeurs, précisez les asymptotes.

Soigner la présentation

• Pour améliorer la **lisibilité de votre copie**, vous avez intérêt à séparer les questions en sautant des lignes et à donner un titre, si possible, à chaque question.

• Pensez également à encadrer vos résultats. ■

LES TRUCS ET ASTUCES DU PROF

Comment avoir une mémoire fonctionnelle ?

1. Prenez soin de votre **sommeil** : la fatigue est l'un des pires ennemis de la mémoire.

2. Mangez équilibré : le cerveau, siège de la mémoire, consomme beaucoup d'énergie ; une **alimentation saine** lui permet de bien fonctionner.

3. Lorsque vous sollicitez beaucoup votre mémoire (une journée de révisions, par exemple), n'oubliez pas de faire des **pauses**.

4. Entraînez votre mémoire et **stimulez votre cerveau** au quotidien (retenir un numéro de téléphone par cœur, etc.).

ORAL DE RATRAPAGE

Durée : 20 minutes.

Temps de préparation : 20 minutes

Coefficient : 7 (ou 9 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité).

L'épreuve consiste en une interrogation du candidat visant à apprécier sa maîtrise des connaissances de base.

Pour préparer l'entretien, l'examineur propose au moins deux questions au candidat, portant sur des parties différentes du programme. Pour les candidats n'ayant pas choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité, les questions aborderont exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire. Pour les candidats ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité, une question abordera le programme de spécialité, les autres abordant exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire. Le candidat dispose d'un temps de préparation de vingt minutes et peut, au cours de l'entretien, s'appuyer sur les notes prises pendant la préparation.

DES RÉVISIONS EFFICACES

1. **Si vous avez du mal à vous y mettre...**

Dites-vous que plus vous attendez, plus ce sera pénible.

2. **Quand vous avez décidé de travailler...**

Faites-le dans le calme. Évitez téléphone, télévision, musique à niveau sonore élevé. Le cerveau travaille difficilement sur deux choses à la fois.

3. **Pour chaque séance de révision...**

Fixez-vous des objectifs. Et, une fois lancé, obligez-vous à aller jusqu'au bout. Imposez-vous un temps limité. C'est la meilleure façon d'être performant.

4. **Pour rester concentré...**

Faites une courte pause entre deux séances de travail pour décompresser et reprendre dans de bonnes conditions.

5. **Pour réviser...**

Faites des fiches et refaites des exercices types sur chaque thème du programme.

6. **Pour contrôler vos connaissances...**

Testez-vous : posez-vous des questions, entraînez-vous sur des sujets de bac.

7. **Si vous saturez...**

Adressez-vous à vos amis. Réviser à deux ou trois, c'est souvent plus stimulant.

8. **Si vous pensez manquer de temps...**

Autorisez-vous à passer plus rapidement sur les thèmes du programme qui vous semblent déjà un peu connus ou que vous jugez moins importants. Dans tous les cas, évitez les impasses et méfiez-vous des « bons tuyaux » qui vous prédisent que telle partie du programme va tomber cette année.

9. **Pour tenir jusqu'au bout...**

Restez positif. Et n'oubliez pas que 80 % des élèves obtiennent cet examen. Il n'y a donc pas de raison pour que vous échouiez.

Crédits

COUVERTURE

Figure : © Jean-Francois COLONNA (CMAP/ECOLE POLYTECHNIQUE, www.lactamme.polytechnique.fr)

Tableau : © alphaspirt/iStock

ANALYSE

Fonction exponentielle

p. 26 Plans de maïs : © Fotolia

p. 27 Infographie réalisée par Lézarts Création

Fonction logarithme népérien

p. 28 John Napier : DR

GÉOMÉTRIE

Nombres complexes

p. 38 Euler : DR

Géométrie dans l'espace

p. 43 Icosaèdre : DR

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Probabilités conditionnelles

p. 51 Formules de Bayes : DR

Échantillonnage

p. 63 Boulangerie industrielle : © Thinkstock

GUIDE PRATIQUE

p. 94 © Fotolia/Picasa

p. 95 © Fotolia

Edité par la Société Editrice du Monde – 80, boulevard Auguste Blanqui – 75013 Paris

Tél : +(33)01 57 28 20 00 – Fax : +(33) 01 57 28 21 21

Internet : www.lemonde.fr

Président du Directoire, Directeur de la Publication : Louis Dreyfus

Directeur de la rédaction : Jérôme Fenoglio

Dépôt légal : mars 2016 - Imprimé par Aubin - Achevé d'imprimer : mars 2016

Numéro hors-série réalisé par Le Monde - © Le Monde – rue des écoles 2016

Pourquoi croire en une société plus collaborative ?

- Merci pour le coup de main.
- On est des voisins "collaboratifs", c'est tendance. Il va avoir un beau bureau ton fils.
- Y'a plus qu'à trouver un voisin collaboratif pour l'aider en math....
- Va sur le site de la MAIF, y'a plein de trucs ! De la maternelle au bac : conseils, cours, préparation aux examens...
- Mais ? Je ne suis pas à la MAIF moi...
- Et alors ? Tout le monde y a accès. À la MAIF, le côté collaboratif, le partage, c'est vraiment leur truc.
- Et expliquer les notices, ils le font aussi ?



Aujourd'hui, on cohabite et on covoiture, on coïnvante et on cofinance. On partage des idées, des connaissances, des expériences et des biens. La MAIF s'engage pour cette société collaborative où les gens se font confiance pour mieux vivre ensemble. En favorisant l'accès à l'éducation pour tous, la MAIF met tout en œuvre pour que la réussite ne soit pas un concept mais une réalité accessible à tous, pour aider à la construction d'une société plus juste.

On a tout à gagner à se faire confiance.

Pour tout savoir, rendez-vous sur : maif.fr/solutionseducatives



assureur militant